$\boxed{1}$

(1)

$$\left(2^x-2^{-x}\right)^2=4^x-2+4^{-x}$$
$$\Leftrightarrow 4^x+4^{-x}=X^2+2$$

が成立する。これを方程式に代入して,

$$4^x-3\cdot 2^x+3\cdot 2^{-x}+4^{-x}=0$$
$$\Leftrightarrow \left(4^x+4^{-x}\right)-3\left(2^x+2^{-x}\right)=0$$
$$\Leftrightarrow X^2+2-3X=0$$
$$\Leftrightarrow X^2-3X+2=0$$

となる。

(答) $X^2-3X+2=0$

(2)

(1)より,

$$X^2-3X+2=0$$
$$\Leftrightarrow (X-2)(X-1)=0$$
$$\Leftrightarrow X=1,\ 2$$
$$\Leftrightarrow 2^x-2^{-x}=1,\ 2$$

$$\Leftrightarrow \left(2^x\right)^2-2^x-1=0 \text{ または } \left(2^x\right)^2-2\cdot 2^x-1=0$$

$$\Leftrightarrow 2^x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2},\ 1\pm\sqrt{2}$$

が成立する。x が実数であるとき $2^x>0$ であるので

$$2^x=\frac{1+\sqrt{5}}{2},\ 1+\sqrt{2}$$

となる。よって, 方程式の実数解は,

$$x=\log_2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right),\ \log_2\left(1+\sqrt{2}\right)$$
$$\Leftrightarrow x=\log_2\left(1+\sqrt{5}\right)-1,\ \log_2\left(1+\sqrt{2}\right)$$

である。

(答) $x=\log_2\left(1+\sqrt{5}\right)-1,\ \log_2\left(1+\sqrt{2}\right)$

$\boxed{2}$

(1)

A を始点とするベクトルを考える。このとき，

$$\overrightarrow{AB}=(2-1,\ 0-1,\ 1-2)=(1,\ -1,\ -1)$$
$$\overrightarrow{AC}=(1-1,\ 1-1,\ 0-2)=(0,\ 0,\ -2)$$
$$\overrightarrow{AD}=(3-1,\ 4-1,\ 6-2)=(2,\ 3,\ 4)$$

である。D から平面 ABC 上に下ろした垂線の足を点 F とおく。このとき，実数 s, t を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AF}&=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}\\&=s(1,\ -1,\ -1)+t(0,\ 0,\ -2)\\&=(s,\ -s,\ -s-2t)\end{aligned}$$

とおけ，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DF}&=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AD}\\&=(s-2,\ -s-3,\ -s-2t-4)\end{aligned}$$

となる。DF は平面 ABC と垂直であるので

$$\begin{cases}\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{AB}=0 & \cdots① \\ \overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{AC}=0 & \cdots②\end{cases}$$

が成り立つ。①より，

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{AB}=0\\&\Leftrightarrow (s-2)\cdot1+(-s-3)\cdot(-1)+(-s-2t-4)\cdot(-1)=0\\&\Leftrightarrow 3s+2t+5=0 \qquad \cdots③\end{aligned}$$

であり，②より

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{AC}=0\\&\Leftrightarrow (s-2)\cdot0+(-s-3)\cdot0+(-s-2t-4)\cdot(-2)=0\\&\Leftrightarrow 2s+4t+8=0\\&\Leftrightarrow s+2t+4=0 \qquad \cdots④\end{aligned}$$

である。したがって，③－④より

$$2s+1=0 \Leftrightarrow s=-\frac{1}{2}$$

であり，これを③に代入して

$$3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+2t+5=0 \Leftrightarrow t=-\frac{7}{4}$$

である。以上より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DF}&=\left(-\frac{1}{2}-2,\ \frac{1}{2}-3,\ \frac{1}{2}+2\cdot\frac{7}{4}-4\right)\\&=\left(-\frac{5}{2},\ -\frac{5}{2},\ 0\right)\end{aligned}$$

であるので

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OE}&=\overrightarrow{OD}+2\overrightarrow{DF}\\&=(3,\ 4,\ 6)+(-5,\ -5,\ 0)\\&=(-2,\ -1,\ 6)\end{aligned}$$

となり，E の座標は $(-2,\ -1,\ 6)$ となる。

(答) $(-2,\ -1,\ 6)$