## 1

(1)

放物線$C: y=x^2+x+a$が$x$軸と相異なる2点A, Bで交わるから，$y=0$としたときの2次方程式$x^2+x+a=0$の判別式$D$について$D>0$であるから

$$1^2-4\cdot a>0 \Leftrightarrow a<\frac{1}{4}$$

が得られる。この条件下，$x^2+x+a=0$の2個の解を$\alpha, \beta\ (\alpha<\beta)$とおくと，解と係数の関係より，

$$\alpha+\beta=-1,\ \alpha\beta=a$$

であり，$\beta-\alpha>0$より，

$$\beta-\alpha=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}=\sqrt{1-4a}$$

となる。また，放物線$C$について，$y'=2x+1$より，点A, Bにおける$C$の接線の傾きはそれぞれ$2\alpha+1, 2\beta+1$である。ここで$\angle$APBはこれら2接線のなす角だから，tanの加法定理より，

$$\tan 120^\circ=\frac{(2\alpha+1)-(2\beta+1)}{1+(2\alpha+1)(2\beta+1)}$$
$$\Leftrightarrow -\sqrt{3}=\frac{-2\sqrt{1-4a}}{1+4a+(-2)+1}$$
$$\Leftrightarrow a=\frac{\sqrt{1-4a}}{2\sqrt{3}}$$

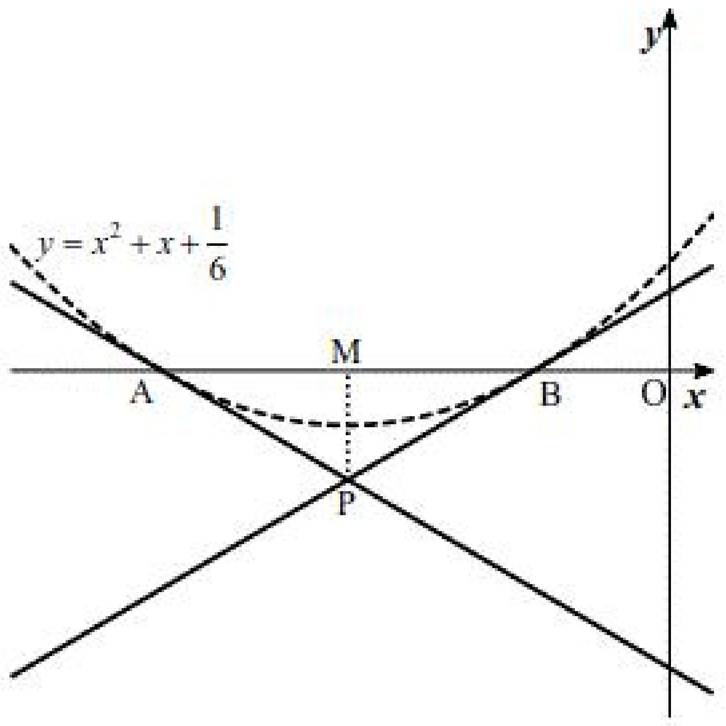
が得られ，これより$a>0$が必要である。さらに両辺を平方して，

$$a^2=\frac{1-4a}{12}$$
$$\Leftrightarrow 12a^2+4a-1=0$$
$$\Leftrightarrow (2a+1)(6a-1)=0$$
$$\Leftrightarrow a=-\frac{1}{2}, \frac{1}{6}$$

を得るが，このうち$a<\frac{1}{4}$かつ$a>0$を満たすものは$a=\frac{1}{6}$である。

(答) $a=\frac{1}{6}$

(2)




放物線$C$と2本の接線からなる図形は放物線の軸$x=-\frac{1}{2}$に関して対称であるから，AP = BP

でありABの中点をMとすると，

$$\angle\mathrm{AMP}=90^\circ,\ \angle\mathrm{APM}=\angle\mathrm{BPM}=60^\circ$$

を満たす。また，$a=\frac{1}{6}$のとき，

$$\beta-\alpha=\sqrt{1-4a}=\sqrt{1-4\cdot\frac{1}{6}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

であるから，

$$\mathrm{MP}=\mathrm{AM}\cdot\frac{1}{\tan 60^\circ}=\frac{\beta-\alpha}{2}\cdot\frac{1}{\tan 60^\circ}=\frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{1}{6}$$

を得て，

$$S=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{AB}\cdot\mathrm{MP}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{6}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{36}$$

が導かれる。

(答) $S=\frac{\sqrt{3}}{36}$

## 2

(1)

4回のさいころの目の出方は$6^4$通りで，すべて同様に確からしく起こる。$n$が2の倍数となるためには4回目に2, 4, 6が出ればよく，1回目から3回目はどの目でもよいから，その場合の数は，

$$6\times6\times6\times3\ (\text{通り})$$

であり，求める確率は，

$$\frac{6\times6\times6\times3}{6^4}=\frac{1}{2}$$

である。

(答) $\frac{1}{2}$

(2)

$n$が3の倍数であることと$n$の各位の和が3の倍数であることは同値である。ここで，さいころの目は1～6であり，3で割った余りが0, 1, 2である目の個数はいずれも2個であることに注意すると，1回目に投げ終わったときの出た目の和を3で割った余りが0, 1, 2である確率はいずれも$\frac{1}{3}$である。また，$k$回目に投げ終わったときの出た目の和を3で割った余りが0, 1, 2である確率がいずれも$\frac{1}{3}$であるとき，$k+1$回目に投げ終わったときの出た目の和を3で割った余りが0である確率は$k$回目時点での余りに何を足したら各位の和が3の倍数になるかを考えて，

$$\frac{1}{3}\times\frac{2}{6}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{6}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

であり，同様に余りが1, 2となる確率も$\frac{1}{3}$である。したがって，帰納的に2回目，3回目，4回目に投げ終わったときの出た目の和を3で割った余りが0, 1, 2である確率はいずれも$\frac{1}{3}$である。

(答) $\frac{1}{3}$

(3)

$n$が45の倍数であるとき，$n$は5の倍数かつ9の倍数であるので，$n$の1の位は0または5であり，各位の和は9の倍数である。このことに注意すると，4回の目の組み合わせは，

$$(1, 1, 2, 5),\ (4, 4, 5, 5),\ (3, 5, 5, 5),\ (3, 4, 5, 6),\ (2, 5, 5, 6),\ (1, 5, 6, 6)$$

である。4回目が5であることに注意すると，それぞれの目の出る順番の場合の数は以下の表の通りになる。

| $(1, 1, 2, 5)$ | $(4, 4, 5, 5)$ | $(3, 5, 5, 5)$ | $(3, 4, 5, 6)$ | $(2, 5, 5, 6)$ | $(1, 5, 6, 6)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| ${}_3C_1=3$(通り) | ${}_3C_1=3$(通り) | ${}_3C_1=3$(通り) | $3!=6$(通り) | $3!=6$(通り) | ${}_3C_1=3$(通り) |

したがって，求める確率は，

$$\frac{3+3+3+6+6+3}{6^4}=\frac{1}{54}$$

である。

(答) $\frac{1}{54}$

$\boxed{3}$

$0<t<3$ の条件下，$\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ のなす角 $\theta$ について $\tan\theta=\dfrac{1}{t+1}>0$ であるから，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ である。

また，$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=0$ より $\angle BOC=\dfrac{\pi}{2}$ である。ここで，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=t-3<0$ であるから，$\dfrac{\pi}{2}<\angle COA$

$\leqq\pi$ であることに注意すると，

$$\angle COA=\angle COB+\angle BOA=\frac{\pi}{2}+\theta$$

が得られる。また，D は線分 OA を $t:1$ に内分するから，$\overrightarrow{OD}=\dfrac{t}{t+1}\overrightarrow{OA}$ であり，

$$\begin{aligned}
S(t)&=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{OD}\right|\left|\overrightarrow{OC}\right|\sin\angle COA\\
&=\frac{1}{2}\cdot\frac{t}{t+1}\left|\overrightarrow{OA}\right|\left|\overrightarrow{OC}\right|\sin\angle COA\\
&=\frac{1}{2}\cdot\frac{t}{t+1}\cdot\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}}{\cos\angle COA}\cdot\sin\angle COA\\
&=\frac{1}{2}\cdot\frac{t}{t+1}(t-3)\tan\angle COA\\
&=\frac{t(t-3)}{2(t+1)}\cdot\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\\
&=\frac{t(t-3)}{2(t+1)}\left(-\frac{1}{\tan\theta}\right)\\
&=\frac{-t(t-3)(t+1)}{2(t+1)}\\
&=-\frac{1}{2}t(t-3)\\
&=-\frac{1}{2}\left(t-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{8}
\end{aligned}$$

である。したがって，$t$ が $0<t<3$ の範囲を動くとき，$t=\dfrac{3}{2}$ で $S(t)$ は最大値 $\dfrac{9}{8}$ をとる。

(答) $t=\dfrac{3}{2}$ で最大値 $\dfrac{9}{8}$

**4**

(1)

任意の自然数 $n=1, 2, \ldots$ に対し

$$a_n > \frac{1}{2} \text{ である} \qquad \cdot\cdot\cdot ①$$

ことを数学的帰納法により証明する。

[1] $n=1$ のとき

条件より，$a_1 = 1 > \frac{1}{2}$ であるから①は成立する。

[2] $n=k$ ( $k$ は自然数)で①が成立するとき

この仮定より $a_k > \frac{1}{2}$ であり，

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= \frac{7a_k - 1}{4a_k + 3} \\ &= \frac{7a_k + \frac{21}{4} - \frac{25}{4}}{4a_k + 3} \\ &= \frac{7}{4} - \frac{25}{4(4a_k + 3)} \\ &> \frac{7}{4} - \frac{25}{4\left(4 \cdot \frac{1}{2} + 3\right)} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

であるから，$n=k+1$ のときも①は成立する。

以上, [1], [2] より，任意の自然数 $n$ で①は成立する。

(証明終)

(2)

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= \frac{2}{2a_{n+1} - 1} \\ &= \frac{2}{2 \cdot \frac{7a_n - 1}{4a_n + 3} - 1} \\ &= \frac{8a_n + 6}{10a_n - 5} \\ &= \frac{8a_n - 4 + 10}{10a_n - 5} \\ &= \frac{4}{5} + \frac{2}{2a_n - 1} \\ &= \frac{4}{5} + b_n \end{aligned}$$

となり，また，

$$b_1 = \frac{2}{2 \cdot a_1 - 1} = 2$$

であるから，

$$\begin{aligned} b_n &= 2 + \frac{4}{5}(n-1) \\ &= \frac{4}{5}n + \frac{6}{5} \end{aligned}$$

である。

(答) $b_n = \frac{4}{5}n + \frac{6}{5}$

$\boxed{5}$

(1)

曲線$C: y=e^x(x^2+2x)$に関して，$e^x>0$より，$y=0$とすると，

$$x^2+2x=0$$
$$\Leftrightarrow x(x+2)=0$$
$$\Leftrightarrow x=-2,\ 0$$

である。また，

$$y'=e^x(x^2+2x)+e^x(2x+2)$$
$$=e^x(x^2+4x+2)$$

であり，$e^x>0$より，$y'=0$とすると，

$$x^2+4x+2=0$$
$$\Leftrightarrow x=-2\pm\sqrt{2}$$

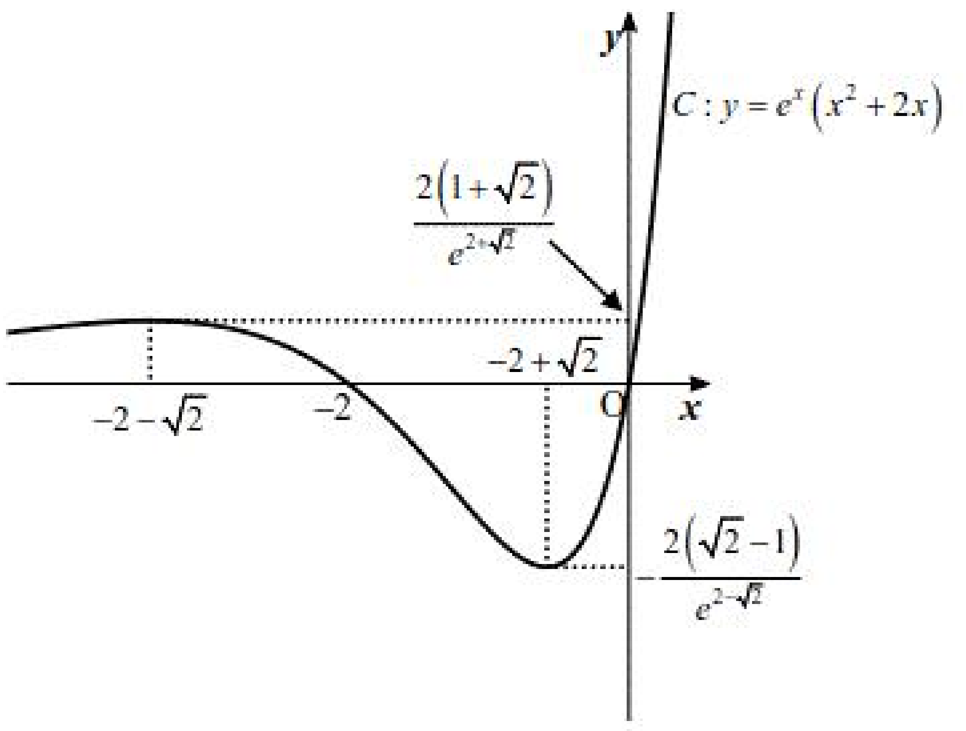
である。また，

$$\lim_{x\to-\infty}e^x(x^2+2x)=0$$
$$\lim_{x\to\infty}e^x(x^2+2x)=\infty$$

であるから，以下のような増減表が得られる。

| $x$ | $(-\infty)$ | $\cdots$ | $-2-\sqrt{2}$ | $\cdots$ | $-2+\sqrt{2}$ | $\cdots$ | $(\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $y$ | $(0)$ | $\nearrow$ | $\dfrac{2(1+\sqrt{2})}{e^{2+\sqrt{2}}}$ | $\searrow$ | $-\dfrac{2(\sqrt{2}-1)}{e^{2-\sqrt{2}}}$ | $\nearrow$ | $(\infty)$ |

したがって，曲線$C$のグラフは以下のようになる。




したがって，曲線$C$と直線$\ell: y=a$がちょうど2点を共有するような$a$が満たす条件は，

$$-\frac{2(\sqrt{2}-1)}{e^{2-\sqrt{2}}}<a\leqq 0,\ a=\frac{2(1+\sqrt{2})}{e^{2+\sqrt{2}}}$$

である。

(答) $-\dfrac{2(\sqrt{2}-1)}{e^{2-\sqrt{2}}}<a\leqq 0,\ a=\dfrac{2(1+\sqrt{2})}{e^{2+\sqrt{2}}}$

(2)

$-\dfrac{2(\sqrt{2}-1)}{e^{2-\sqrt{2}}}<a_1<a_2\leqq 0$を満たす$a_1,\ a_2$において，グラフより$S(a_1)<S(a_2)$が成立するから，$-\dfrac{2(\sqrt{2}-1)}{e^{2-\sqrt{2}}}<a\leqq 0$の範囲では$a=0$のとき$S(a)$は最大値をとる。さらに，グラフより，$S(0)<S\left(\dfrac{2(1+\sqrt{2})}{e^{2+\sqrt{2}}}\right)$であるから，(1)で求めた条件下で$a=\dfrac{2(1+\sqrt{2})}{e^{2+\sqrt{2}}}$のとき$S(a)$は最大値をとり，その最大値は

$$S\left(\frac{2(1+\sqrt{2})}{e^{2+\sqrt{2}}}\right)=\int_{-2-\sqrt{2}}^{0}\left\{\frac{2(1+\sqrt{2})}{e^{2+\sqrt{2}}}-e^x(x^2+2x)\right\}dx$$
$$=\left[\frac{2(1+\sqrt{2})}{e^{2+\sqrt{2}}}x\right]_{-2-\sqrt{2}}^{0}-\int_{-2-\sqrt{2}}^{0}e^x(x^2+2x)dx$$
$$=\frac{2(1+\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}{e^{2+\sqrt{2}}}-\left[e^x(x^2+2x)\right]_{-2-\sqrt{2}}^{0}+\int_{-2-\sqrt{2}}^{0}e^x(2x+2)dx$$
$$=\frac{8+6\sqrt{2}}{e^{2+\sqrt{2}}}-\left[e^x(x^2+2x)\right]_{-2-\sqrt{2}}^{0}+\left[e^x(2x+2)\right]_{-2-\sqrt{2}}^{0}-\int_{-2-\sqrt{2}}^{0}2e^xdx$$
$$=\frac{8+6\sqrt{2}}{e^{2+\sqrt{2}}}+\left[e^x(-x^2+2)\right]_{-2-\sqrt{2}}^{0}-\left[2e^x\right]_{-2-\sqrt{2}}^{0}$$
$$=\frac{8+6\sqrt{2}}{e^{2+\sqrt{2}}}+\left[-e^xx^2\right]_{-2-\sqrt{2}}^{0}$$
$$=\frac{8+6\sqrt{2}}{e^{2+\sqrt{2}}}+\frac{6+4\sqrt{2}}{e^{2+\sqrt{2}}}$$
$$=\frac{14+10\sqrt{2}}{e^{2+\sqrt{2}}}$$

である。

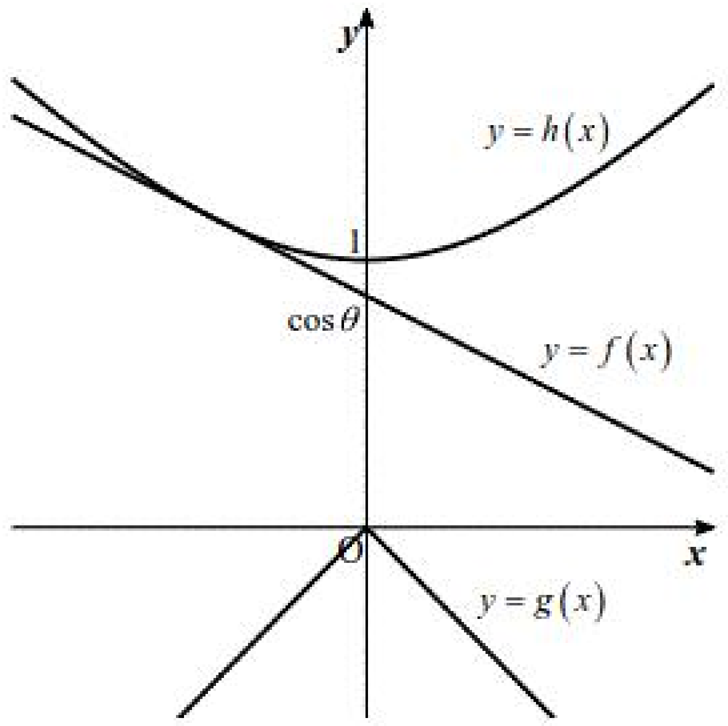
(答) $a=\dfrac{2(1+\sqrt{2})}{e^{2+\sqrt{2}}}$のとき最大値$\dfrac{14+10\sqrt{2}}{e^{2+\sqrt{2}}}$

6

$f(x)=(\sin\theta)x+\cos\theta$
$g(x)=-|x|$
$h(x)=\sqrt{x^2+1}$

とおく。ここで$\theta$の範囲で場合分けを行う。

[1] $-\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta<0$のとき




$-1\leqq\sin\theta<0$より$f(x)$は単調減少関数である。ここで$g(0)\leqq f(0)$に注意すると，グラフより$x\leqq 0$で$g(x)\leqq f(x)$であり，$x>0$のとき，

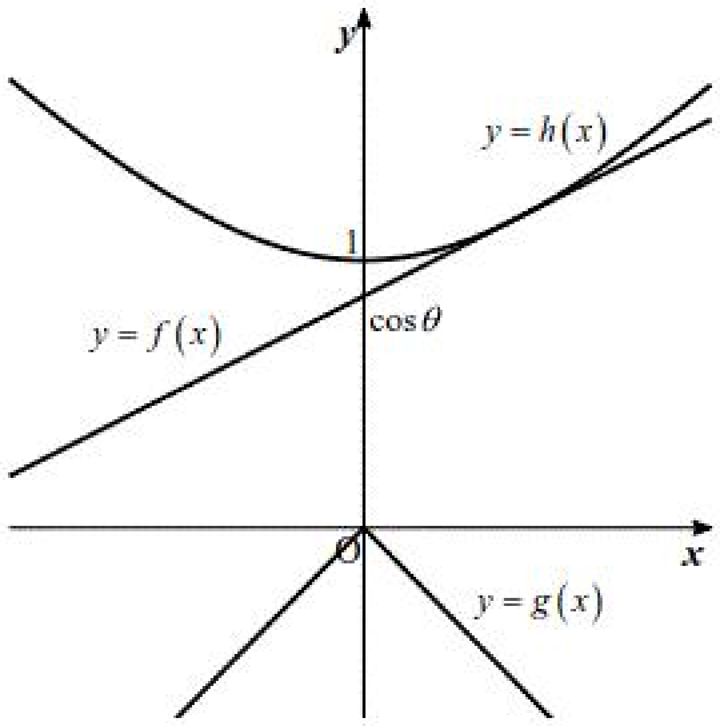
$$f(x)-g(x)=(\sin\theta+1)x+\cos\theta\geqq(\sin\theta+1)\cdot 0+\cos\theta=\cos\theta\geqq 0\ (\because \sin\theta+1\geqq 0)$$

であるから，すべての$x$で$g(x)\leqq f(x)$である。一方，$f(0)\leqq h(0)$に注意すると，グラフより$x\geqq 0$で$f(x)\leqq h(x)$であり，$x<0$のとき，

$$\begin{aligned}\{h(x)\}^2-\{f(x)\}^2&=x^2+1-(\sin^2\theta)x^2-(2\sin\theta\cos\theta)x-\cos^2\theta\\&=(\cos^2\theta)x^2-(2\sin\theta\cos\theta)x-\sin^2\theta\\&=\{(\cos\theta)x-\sin\theta\}^2\end{aligned}$$

と変形でき，$f(x)\geqq 0, h(x)>0$より，$h(x)-f(x)\geqq 0$であるから，すべての$x$で$f(x)\leqq h(x)$である。以上から，すべての$x$で$g(x)\leqq f(x)\leqq h(x)$が成立する。

[2] $0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$のとき




$0\leqq\sin\theta\leqq 1$より$f(x)$は単調増加関数である。ここで$g(0)\leqq f(0)$に注意すると，グラフより$x\geqq 0$で$g(x)\leqq f(x)$であり，$x<0$のとき，

$$f(x)-g(x)=(\sin\theta+1)x+\cos\theta\geqq(\sin\theta+1)\cdot 0+\cos\theta=\cos\theta\geqq 0\ (\because \sin\theta+1\geqq 0)$$

であるから，すべての$x$で$g(x)\leqq f(x)$である。一方，$f(0)\leqq h(0)$に注意すると，グラフより$x\leqq 0$で$f(x)\leqq h(x)$であり，$x>0$のとき，

$$\begin{aligned}\{h(x)\}^2-\{f(x)\}^2&=x^2+1-(\sin^2\theta)x^2-(2\sin\theta\cos\theta)x-\cos^2\theta\\&=(\cos^2\theta)x^2-(2\sin\theta\cos\theta)x-\sin^2\theta\\&=\{(\cos\theta)x-\sin\theta\}^2\end{aligned}$$

と変形でき，$f(x)\geqq 0, h(x)>0$より，$h(x)-f(x)\geqq 0$であるから，すべての$x$で$f(x)\leqq h(x)$である。以上から，すべての$x$で$g(x)\leqq f(x)\leqq h(x)$が成立する。

以上, [1], [2]より，$\theta$が$-\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$を動くとき，すべての$x$で$g(x)\leqq f(x)\leqq h(x)$が成立し，題意は示された。

(証明終)

$\boxed{7}$

(1)

$\alpha \in M$ かつ $\alpha \neq 0$ である $\alpha$ に関して，条件$(\mathrm{b})$より任意の自然数 $k$ で $\alpha^k \in M$ である。$M$ は有限集合だから，$\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \cdots$ の中に等しい2つが存在する。これを $\alpha^\ell, \alpha^m\ (\ell < m)$ とすると，

$$\alpha^\ell = \alpha^m \Leftrightarrow \alpha^{m-\ell} = 1$$

が成立するので，$\alpha^n = 1$ となる自然数 $n$ が存在する。

(証明終)

(2)

$\alpha \in M$ を満たす任意の $\alpha$ について，$\alpha^m = 1$ より

$$|\alpha|^m = 1$$
$$\therefore |\alpha| = 1$$

が成り立つので，$\alpha = \cos\theta + i\sin\theta$ と表せる。このとき，与えられた $m$ を用いて

$\alpha^m = \cos m\theta + i\sin m\theta$ と表せて，$\alpha^m = 1$ であるから，0以上の整数 $l$ を用いて，

$$m\theta = 2\pi \times l \Leftrightarrow \theta = \frac{2\pi}{m} \times l$$

が成り立つ。したがって，$\alpha = \cos\frac{2\pi}{m}\cdot l + i\sin\frac{2\pi}{m}\cdot l$ と表せるから，自然数 $j$ に対して

$\alpha^j = \cos\frac{2\pi}{m}\cdot l_j + i\sin\frac{2\pi}{m}\cdot l_j$ ($l_j$ は0以上の整数)とおける。$l_j$ を $m$ で割った余りを $d_j$ とすると，

$\alpha^j = \cos\frac{2\pi}{m}\cdot d_j + i\sin\frac{2\pi}{m}\cdot d_j$ である。また，$m$ は $\alpha^m = 1$ を満たす自然数のうち最小のものであるから，$1 \leqq j < m$ を満たす $j$ について，$\alpha^j \neq 1$ である。ゆえに，$1 \leqq a < b \leqq m$ を満たす任意の自然数 $a, b$ について，

$$\frac{\alpha^b}{\alpha^a} = \alpha^{b-a}$$
$$\neq 1 (\because 1 \leqq b-a < m)$$
$$\therefore \alpha^a \neq \alpha^b$$

である。このとき，$\alpha^j = \cos\frac{2\pi}{m}\cdot d_j + i\sin\frac{2\pi}{m}\cdot d_j$ と表せることから $d_a \neq d_b$ となる。以上より，$m$ 個の数 $d_1, d_2, \ldots, d_m$ はいずれも0以上 $m-1$ 以下の整数であり，互いに異なるから，$d_1, d_2, \ldots, d_m$ のうちただ1つが1に等しい。$d_c = 1$ を満たす自然数 $c$ を考えると，

$$\alpha^c = \cos\frac{2\pi}{m}\cdot 1 + i\sin\frac{2\pi}{m}\cdot 1$$
$$= \cos\frac{2\pi}{m} + i\cos\frac{2\pi}{m}$$

となり，$\cos\frac{2\pi}{m} + i\cos\frac{2\pi}{m} \in M$ が示された。

(証明終)