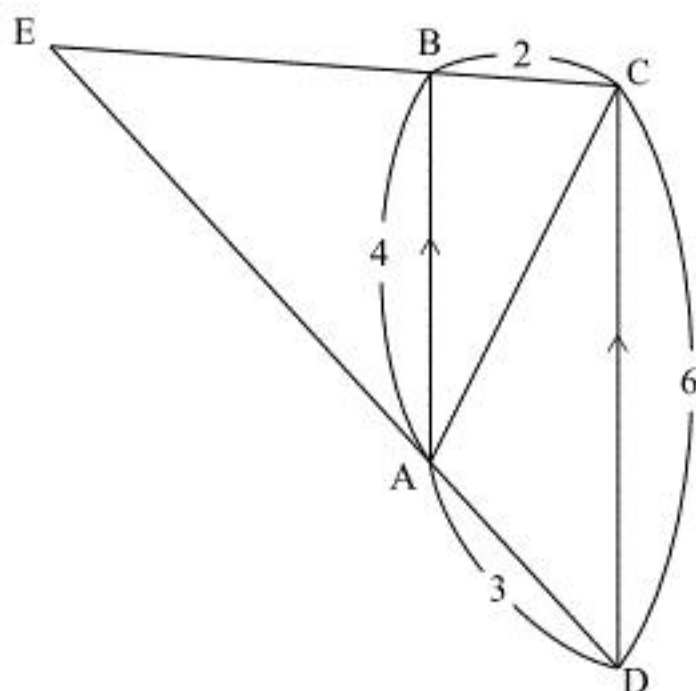


(1)

直線 BC と直線 AD の交点を点 E とし、四角形 $ABCD$ と点 E を図示すると下図のようになる。



$\triangle EAB$ と $\triangle EDC$ は相似であり、 $AB:DC=4:6=2:3$ であるから、

$$EA:ED=2:3$$

$$\Leftrightarrow EA:AD=2:1$$

$$\therefore EA=6 \quad (\because AD=3)$$

$$EB:EC=2:3$$

$$\Leftrightarrow EB:BC=2:1$$

$$\therefore EB=4 \quad (\because BC=2)$$

となる。 $\triangle ABE$ に余弦定理を用いると、

$$AB^2 = EA^2 + EB^2 - 2EA \cdot EB \cos \angle BEA$$

$$\Leftrightarrow \cos \angle BEA = \frac{6^2 + 4^2 - 4^2}{2 \cdot 6 \cdot 4} = \frac{36}{48} = \frac{3}{4}$$

である。よって、 $\triangle ACE$ に余弦定理を用いると、

$$AC^2 = EA^2 + EC^2 - 2EA \cdot EC \cos \angle BEA$$

$$\Leftrightarrow AC^2 = 6^2 + 6^2 - 2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{3}{4} = 18$$

$$\therefore AC = 3\sqrt{2} \quad (\because AC > 0)$$

となる。

(答) $AC = 3\sqrt{2}$

(2)

四角形 $ABCD$ の面積は、 $\triangle ECD$ の面積から $\triangle EAB$ の面積を引いたものである。(1)より、

$\cos \angle BEA = \frac{3}{4}$ であり、 $0 < \angle BEA < \frac{\pi}{2}$ より、 $\sin \angle BEA > 0$ となるから、

$$\sin \angle BEA = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

である。よって、求める面積は、

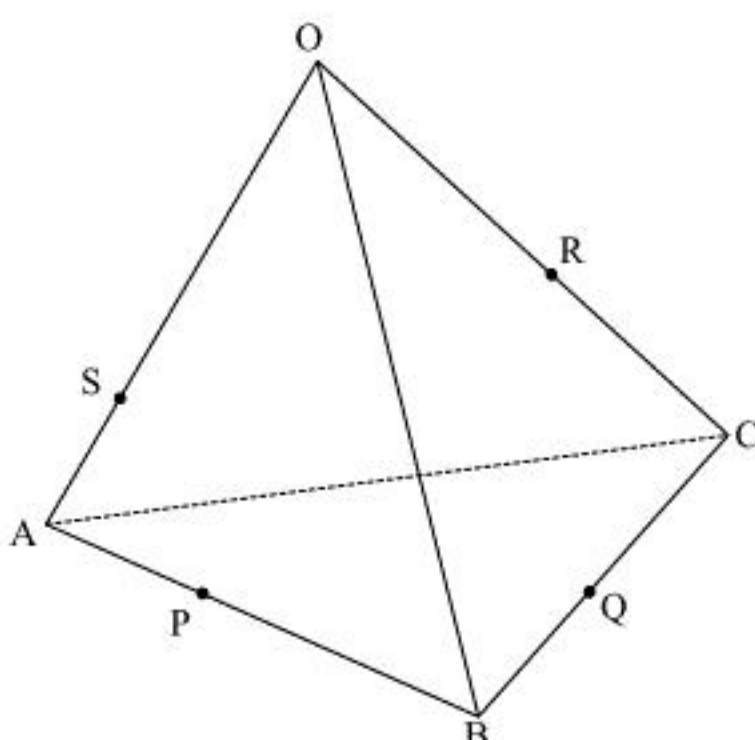
$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \sin \angle BEA \cdot EC \cdot ED - \frac{1}{2} \cdot \sin \angle BEA \cdot EA \cdot EB &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{7}}{4} \{(4+2) \cdot (6+3) - 6 \cdot 4\} \\ &= \frac{\sqrt{7}}{8} \cdot 30 \\ &= \frac{15}{4} \sqrt{7} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{15}{4} \sqrt{7}$

(1)

四面体 OABC と点 P, Q, R, S を図示すると以下のようなになる。



点 S は、辺 OA 上にあるから、 k を実数とし、

$$\overrightarrow{OS} = k\overrightarrow{OA} \quad \dots \textcircled{1}$$

とおける。また、問題文より、

$$\overrightarrow{OP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$$

$$\overrightarrow{OQ} = \frac{3}{5}\overrightarrow{OB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{OC}$$

$$\overrightarrow{OR} = \frac{4}{7}\overrightarrow{OC}$$

となる。いま、4 点 P, Q, R, S が同一平面上にあるから、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OS} &= p\overrightarrow{OP} + q\overrightarrow{OQ} + (1-p-q)\overrightarrow{OR} \\ &= \frac{2}{3}p\overrightarrow{OA} + \left(\frac{1}{3}p + \frac{3}{5}q\right)\overrightarrow{OB} + \left(\frac{4}{7} - \frac{4}{7}p - \frac{6}{35}q\right)\overrightarrow{OC} \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

を満たす実数 p, q が存在する。立体 OABC が四面体をとることから、ベクトル $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ は一次独立である。①と②の係数を比較して、

$$\begin{cases} \frac{2}{3}p = k \\ \frac{1}{3}p + \frac{3}{5}q = 0 \\ \frac{4}{7} - \frac{4}{7}p - \frac{6}{35}q = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{2}{3}p \\ p = -\frac{9}{5}q \\ q = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} k = \frac{4}{5} \\ p = \frac{6}{5} \\ q = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

となる。よって、 $\overrightarrow{OS} = \frac{4}{5}\overrightarrow{OA}$ であるから、OS:SA = 4:1 である。

(答) OS:SA = 4:1

(2)

点 H は線分 QS 上の点であるから、実数 h を用いて、

$$\overrightarrow{OH} = h\overrightarrow{OQ} + (1-h)\overrightarrow{OS}$$

と表せる。ここで、(1)より、 $\overrightarrow{OQ} = \frac{3}{5}\overrightarrow{OB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{OC}$ 、 $\overrightarrow{OS} = \frac{4}{5}\overrightarrow{OA}$ であるから、

$$\overrightarrow{OH} = \frac{4}{5}(1-h)\overrightarrow{OA} + \frac{3}{5}h\overrightarrow{OB} + \frac{2}{5}h\overrightarrow{OC}$$

$$\overrightarrow{SQ} = -\frac{4}{5}\overrightarrow{OA} + \frac{3}{5}\overrightarrow{OB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{OC}$$

となる。また、四面体 OABC が正四面体であるから、実数 l ($l > 0$) を用いて

$$OA = OB = OC = l$$

と表すことができ、

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA} = l^2 \cos \frac{\pi}{3} = \frac{l^2}{2}$$

となる。ここで、直線 QS と直線 OH は垂直であるから、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{SQ} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left\{ \frac{4}{5}(1-h)\overrightarrow{OA} + \frac{3}{5}h\overrightarrow{OB} + \frac{2}{5}h\overrightarrow{OC} \right\} \cdot \left\{ -\frac{4}{5}\overrightarrow{OA} + \frac{3}{5}\overrightarrow{OB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{OC} \right\} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{25} \{ -16(1-h) + 9h + 4h \} \cdot l^2 + \frac{1}{25} \{ 20(1-h) - 6h - 2h \} \cdot \frac{l^2}{2} &= 0 \\ \Leftrightarrow (16 + 9 + 4 - 10 - 3 - 1)h - 16 + 10 &= 0 \quad (\because l \neq 0) \\ \Leftrightarrow 15h &= 6 \\ \therefore h &= \frac{2}{5} \end{aligned}$$

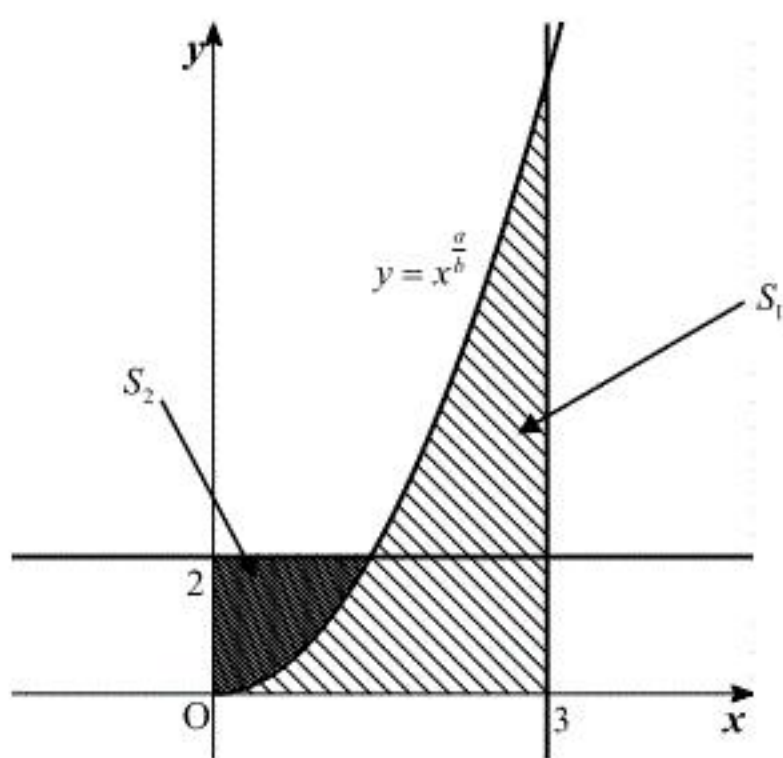
となる。求める $\triangle OSH$ と $\triangle OHQ$ の面積比は、SH と HQ の比に等しい。 $\overrightarrow{OH} = \frac{2}{5}\overrightarrow{OQ} + \frac{3}{5}\overrightarrow{OS}$ で

あることから、SH:HQ = 2:3 である。

(答) 2:3

(1)

曲線 $y = x^{\frac{a}{b}}$, 直線 $x = 3$, $y = 2$ および面積 S_1 , S_2 をグラフに示すと以下のようになる。



いま, $a > b > 0$ より, $\frac{a}{b} > 1$ である。また, 曲線 $y = x^{\frac{a}{b}}$ は原点を通る曲線であり, $x \geq 0$ のとき,

$x^{\frac{a}{b}} \geq 0$ であるから,

$$S_1 = \int_0^3 x^{\frac{a}{b}} dx = \left[\frac{1}{\frac{a}{b} + 1} x^{\frac{a}{b} + 1} \right]_0^3 = \frac{b}{a+b} 3^{\frac{a+b}{b}} = 3^{\frac{1}{b}} b \quad (\because a+b=1)$$

である。また, $y = x^{\frac{a}{b}} \Leftrightarrow x = y^{\frac{b}{a}}$ より,

$$S_2 = \int_0^2 y^{\frac{b}{a}} dy = \left[\frac{1}{\frac{b}{a} + 1} y^{\frac{b}{a} + 1} \right]_0^2 = \frac{a}{a+b} 2^{\frac{a+b}{a}} = 2^{\frac{1}{a}} a$$

となる。よって,

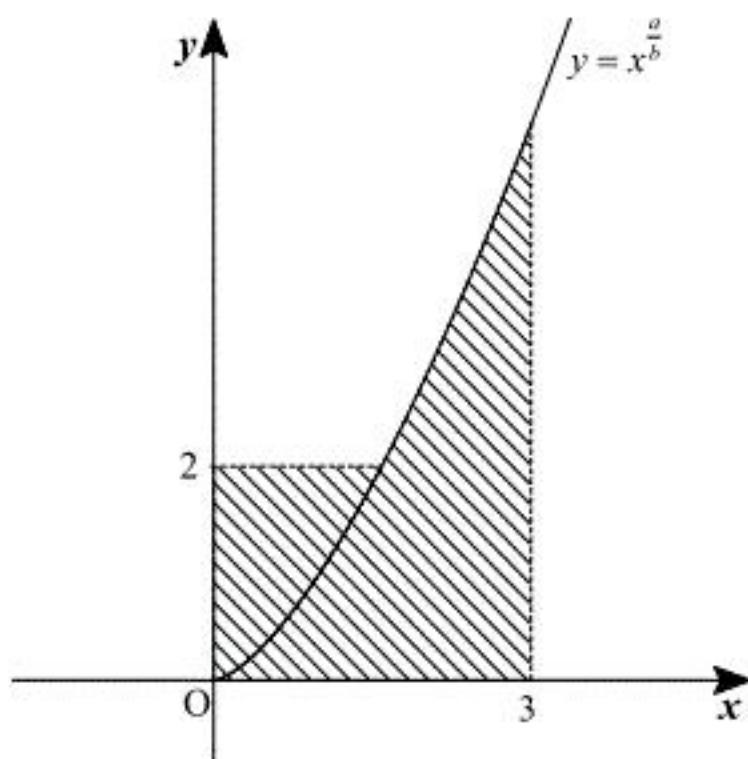
$$S_1 + S_2 = 2^{\frac{1}{a}} a + 3^{\frac{1}{b}} b$$

である。

$$(\text{答}) \quad S_1 + S_2 = 2^{\frac{1}{a}} a + 3^{\frac{1}{b}} b$$

(2)

(1)で求めた $S_1 + S_2$ は, 以下の図の斜線部の領域の面積と等しい。



この領域に, 4点 $O, (0, 2), (3, 2), (3, 0)$ がなす長方形が含まれることに着目して, 斜線部の領域および長方形の面積を比較すると,

$$S_1 + S_2 = 3^{\frac{1}{b}} b + 2^{\frac{1}{a}} a \geq 6$$

が得られるから, 題意が示された。

(証明終)

(1)

$$f(x) = \log(1+x) - \left(x - \frac{1}{2}x^2\right) \text{ とおくと,}$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - (1-x) = \frac{x^2}{1+x}$$

であり, $x \geq 0$ において $f'(x) \geq 0$ であるから, $f(x)$ は $x \geq 0$ の範囲で単調増加する。したがって, $x \geq 0$ において,

$$f(x) \geq f(0) = 0 \Leftrightarrow x - \frac{1}{2}x^2 \leq \log(1+x)$$

が成立する。また, $g(x) = x - \log(1+x)$ とおくと,

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$$

であり, $x \geq 0$ において $g'(x) \geq 0$ であるから, $g(x)$ は $x \geq 0$ の範囲で単調増加する。したがって, $x \geq 0$ において,

$$g(x) \geq g(0) = 0 \Leftrightarrow \log(1+x) \leq x$$

が成立する。以上より, $x \geq 0$ において, $x - \frac{1}{2}x^2 \leq \log(1+x) \leq x$ が成立することが示された。

(証明終)

(2)

区分求積法より,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{4n^2 - k^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \cdot \frac{n}{\sqrt{4n^2 - k^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{4 - \left(\frac{k}{n}\right)^2}} = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx$$

である。ここで, $x = 2\sin\theta$ とおくと, $dx = 2\cos\theta d\theta$ となり,

x	0	$\rightarrow$	1
θ	0	$\rightarrow$	$\frac{\pi}{6}$

と対応するから,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{2\cos\theta}{\sqrt{4-4\sin^2\theta}} d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}} d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos\theta}{\cos\theta} d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} d\theta \\ &= [\theta]_0^{\frac{\pi}{6}} \\ &= \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

である。したがって, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{4n^2 - k^2}} = \frac{\pi}{6}$ である。

(答) $\frac{\pi}{6}$

(3)

$0 \leq k \leq n$ を満たす任意の整数 k について, $\frac{1}{\sqrt{4n^2 - k^2}} > 0$ であるから, $P_n > 0$ である。よって,

与式について両辺の自然対数をとると,

$$\log P_n = \log \left(1 + \frac{1}{\sqrt{4n^2 - 1^2}}\right) \left(1 + \frac{1}{\sqrt{4n^2 - 2^2}}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{\sqrt{4n^2 - n^2}}\right) = \sum_{k=1}^n \log \left(1 + \frac{1}{\sqrt{4n^2 - k^2}}\right)$$

と表せる。(1)より, $x \geq 0$ において, $x - \frac{1}{2}x^2 \leq \log(1+x) \leq x$ が成立するから,

$$\frac{1}{\sqrt{4n^2 - k^2}} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{4n^2 - k^2}} \right)^2 \leq \log \left(1 + \frac{1}{\sqrt{4n^2 - k^2}} \right) \leq \frac{1}{\sqrt{4n^2 - k^2}}$$

が成立する。ゆえに,

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{\sqrt{4n^2 - k^2}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4n^2 - k^2} \right) \leq \sum_{k=1}^n \log \left(1 + \frac{1}{\sqrt{4n^2 - k^2}} \right) = \log P_n \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{4n^2 - k^2}}$$

が成立する。ここで,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{4n^2} &< \sum_{k=1}^n \frac{1}{4n^2 - k^2} < \sum_{k=1}^n \frac{1}{4n^2 - n^2} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{4n} &< \sum_{k=1}^n \frac{1}{4n^2 - k^2} < \frac{1}{3n} \end{aligned}$$

が成立し, はさみうちの原理より,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{4n^2 - k^2} = 0$$

である。したがって, (2)の結果より,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{4n^2 - k^2}} = \frac{\pi}{6}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{\sqrt{4n^2 - k^2}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4n^2 - k^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{4n^2 - k^2}} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{4n^2 - k^2} = \frac{\pi}{6}$$

である。以上より, はさみうちの原理によって,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \log P_n &= \frac{\pi}{6} \\ \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} P_n &= e^{\frac{\pi}{6}} \end{aligned}$$

である。

(答) $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = e^{\frac{\pi}{6}}$