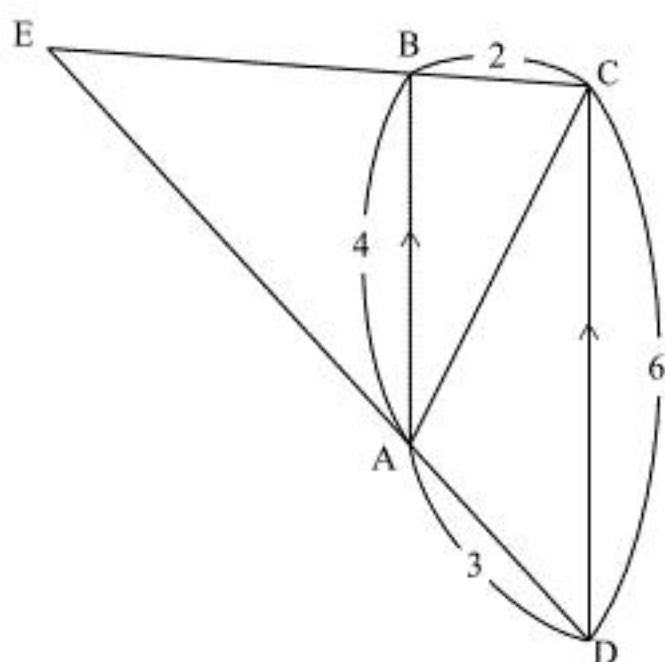


(1)

直線 BC と直線 AD の交点を点 E とし、四角形 ABCD と点 E を図示すると下図のようになる。



$\triangle EAB$ と $\triangle EDC$ は相似であり、 $AB:DC = 4:6 = 2:3$ であるから、

$$EA:ED = 2:3$$

$$\Leftrightarrow EA:AD = 2:1$$

$$\therefore EA = 6 \quad (\because AD = 3)$$

$$EB:EC = 2:3$$

$$\Leftrightarrow EB:BC = 2:1$$

$$\therefore EB = 4 \quad (\because BC = 2)$$

となる。 $\triangle ABE$ に余弦定理を用いると、

$$AB^2 = EA^2 + EB^2 - 2EA \cdot EB \cos \angle BEA$$

$$\Leftrightarrow \cos \angle BEA = \frac{6^2 + 4^2 - 4^2}{2 \cdot 6 \cdot 4} = \frac{36}{48} = \frac{3}{4}$$

である。よって、 $\triangle ACE$ に余弦定理を用いると、

$$AC^2 = EA^2 + EC^2 - 2EA \cdot EC \cos \angle BEA$$

$$\Leftrightarrow AC^2 = 6^2 + 6^2 - 2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{3}{4} = 18$$

$$\therefore AC = 3\sqrt{2} \quad (\because AC > 0)$$

となる。

(答) $AC = 3\sqrt{2}$

(2)

四角形 ABCD の面積は、 $\triangle ECD$ の面積から $\triangle EAB$ の面積を引いたものである。(1)より、

$\cos \angle BEA = \frac{3}{4}$ であり、 $0 < \angle BEA < \frac{\pi}{2}$ より、 $\sin \angle BEA > 0$ となるから、

$$\sin \angle BEA = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

である。よって、求める面積は、

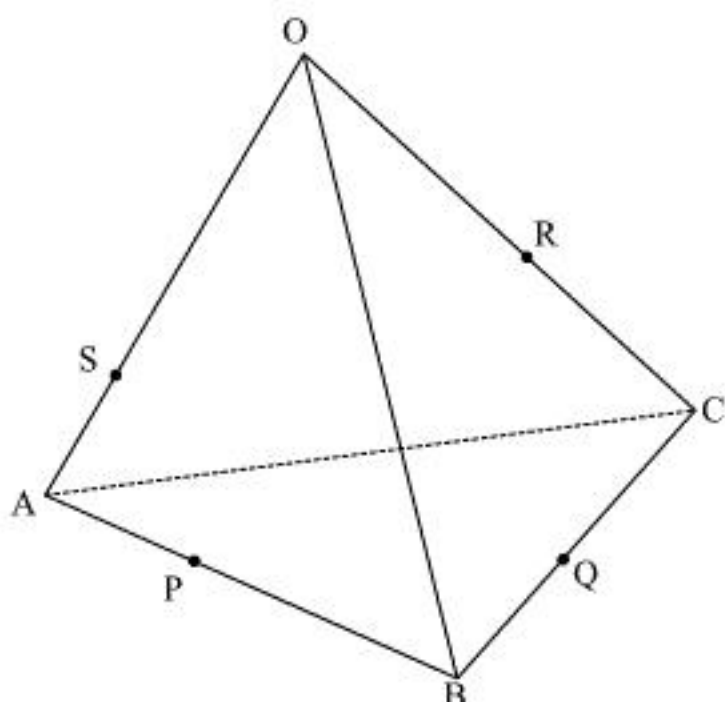
$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \sin \angle BEA \cdot EC \cdot ED - \frac{1}{2} \cdot \sin \angle BEA \cdot EA \cdot EB &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{7}}{4} \{ (4+2) \cdot (6+3) - 6 \cdot 4 \} \\ &= \frac{\sqrt{7}}{8} \cdot 30 \\ &= \frac{15}{4} \sqrt{7} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{15}{4} \sqrt{7}$

(1)

四面体OABCと点P, Q, R, Sを図示すると以下のようになる。



点Sは、辺OA上にあるから、 k を実数とし、

$$\overrightarrow{OS} = k\overrightarrow{OA} \quad \dots \textcircled{1}$$

とおける。また、問題文より、

$$\overrightarrow{OP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$$

$$\overrightarrow{OQ} = \frac{3}{5}\overrightarrow{OB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{OC}$$

$$\overrightarrow{OR} = \frac{4}{7}\overrightarrow{OC}$$

となる。いま、4点P, Q, R, Sが同一平面上にあるから、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OS} &= p\overrightarrow{OP} + q\overrightarrow{OQ} + (1-p-q)\overrightarrow{OR} \\ &= \frac{2}{3}p\overrightarrow{OA} + \left(\frac{1}{3}p + \frac{3}{5}q\right)\overrightarrow{OB} + \left(\frac{4}{7} - \frac{4}{7}p - \frac{6}{35}q\right)\overrightarrow{OC} \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

を満たす実数 p, q が存在する。立体OABCが四面体をとることから、ベクトル $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ は一次独立である。①と②の係数を比較して、

$$\begin{cases} \frac{2}{3}p = k \\ \frac{1}{3}p + \frac{3}{5}q = 0 \\ \frac{4}{7} - \frac{4}{7}p - \frac{6}{35}q = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{2}{3}p \\ p = -\frac{9}{5}q \\ q = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} k = \frac{4}{5} \\ p = \frac{6}{5} \\ q = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

となる。よって、 $\overrightarrow{OS} = \frac{4}{5}\overrightarrow{OA}$ であるから、 $OS:SA = 4:1$ である。

(答) $OS:SA = 4:1$

(2)

点Hは線分QS上の点であるから、実数 h を用いて、

$$\overrightarrow{OH} = h\overrightarrow{OQ} + (1-h)\overrightarrow{OS}$$

と表せる。ここで、(1)より、 $\overrightarrow{OQ} = \frac{3}{5}\overrightarrow{OB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{OC}$ 、 $\overrightarrow{OS} = \frac{4}{5}\overrightarrow{OA}$ であるから、

$$\overrightarrow{OH} = \frac{4}{5}(1-h)\overrightarrow{OA} + \frac{3}{5}h\overrightarrow{OB} + \frac{2}{5}h\overrightarrow{OC}$$

$$\overrightarrow{SQ} = -\frac{4}{5}\overrightarrow{OA} + \frac{3}{5}\overrightarrow{OB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{OC}$$

となる。また、四面体OABCが正四面体であるから、実数 l ($l > 0$)を用いて

$$OA = OB = OC = l$$

と表すことができ、

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA} = l^2 \cos \frac{\pi}{3} = \frac{l^2}{2}$$

となる。ここで、直線QSと直線OHは垂直であるから、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{SQ} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left\{ \frac{4}{5}(1-h)\overrightarrow{OA} + \frac{3}{5}h\overrightarrow{OB} + \frac{2}{5}h\overrightarrow{OC} \right\} \cdot \left\{ -\frac{4}{5}\overrightarrow{OA} + \frac{3}{5}\overrightarrow{OB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{OC} \right\} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{25} \{ -16(1-h) + 9h + 4h \} \cdot l^2 + \frac{1}{25} \{ 20(1-h) - 6h - 2h \} \cdot \frac{l^2}{2} &= 0 \\ \Leftrightarrow (16 + 9 + 4 - 10 - 3 - 1)h - 16 + 10 &= 0 \quad (\because l \neq 0) \\ \Leftrightarrow 15h &= 6 \\ \therefore h &= \frac{2}{5} \end{aligned}$$

となる。求める $\triangle OSH$ と $\triangle OHQ$ の面積比は、SHとHQの比に等しい。 $\overrightarrow{OH} = \frac{2}{5}\overrightarrow{OQ} + \frac{3}{5}\overrightarrow{OS}$ で

あることから、 $SH:HQ = 2:3$ である。

(答) $2:3$