

初項 a 、公差 d の等差数列を $\{a_n\}$ とおいて一般項を求めると、

$$a_n = a + d(n-1) = a - d + dn$$

となる。データの平均を $\overline{a_n}$ とすると、 $\overline{a_n}$ は各項の和を項数で割ったものであるから、

$$\begin{aligned}\overline{a_n} &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (a - d + dk) \\ &= \frac{1}{n} \left\{ (a-d) \cdot n + d \cdot \frac{1}{2} n(n+1) \right\} \\ &= a - \frac{d}{2} + \frac{d}{2} n\end{aligned}$$

である。次に分散を求める。分散はデータの二乗の平均 $\overline{a_n^2}$ と平均の二乗 $(\overline{a_n})^2$ の差 $\overline{a_n^2} - (\overline{a_n})^2$

で表される。二乗の平均 $\overline{a_n^2}$ を求めると、

$$\begin{aligned}\overline{a_n^2} &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k^2 \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (a - d + dk)^2 \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left\{ (a-d)^2 + 2d(a-d)k + d^2 k^2 \right\} \\ &= \frac{1}{n} \left\{ (a-d)^2 n + 2d(a-d) \cdot \frac{1}{2} n(n+1) + d^2 \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) \right\} \\ &= \frac{d^2}{6} (2n^2 + 3n + 1) + d(a-d)n + d(a-d) + (a-d)^2 \\ &= \frac{d^2}{3} n^2 + \left(ad - \frac{d^2}{2} \right) n + a^2 - ad + \frac{d^2}{6}\end{aligned}$$

である。よって求める分散は

$$\begin{aligned}\overline{a_n^2} - (\overline{a_n})^2 &= \frac{d^2}{3} n^2 + \left(ad - \frac{d^2}{2} \right) n + a^2 - ad + \frac{d^2}{6} - \left(a - \frac{d}{2} + \frac{d}{2} n \right)^2 \\ &= \frac{d^2}{3} n^2 + \left(ad - \frac{d^2}{2} \right) n + a^2 - ad + \frac{d^2}{6} - \left\{ a^2 - ad + \frac{d^2}{4} + (2a-d) \frac{d}{2} n + \frac{d^2}{4} n^2 \right\} \\ &= \frac{d^2}{12} n^2 - \frac{d^2}{12} \\ &= \frac{d^2}{12} (n^2 - 1)\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \text{ 平均 } a - \frac{d}{2} + \frac{d}{2} n, \text{ 分散 } \frac{d^2}{12} (n^2 - 1)$$

線分 AB を 2:1 に内分する点を点 C とすると、

$$\overrightarrow{OC} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$$

と表せる。点 C は線分 PQ 上にあるから $0 \leq k \leq 1$ を満たす実数 k を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OC} &= k\overrightarrow{OP} + (1-k)\overrightarrow{OQ} \\ &= kx\vec{a} + (1-k)y\vec{b}\end{aligned}$$

と表せる。ベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ は零ベクトルでなく平行でないから、係数を比較して

$$\begin{cases} \frac{1}{3} = kx & \cdots \textcircled{1} \\ \frac{2}{3} = (1-k)y & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

となる。①において、 $k=0$ とすると $\frac{1}{3}=0$ となり矛盾する。よって、 $k \neq 0$ であるから

$$x = \frac{1}{3k}$$

となる。また②において、 $k=1$ とすると $\frac{2}{3}=0$ となり矛盾する。よって、 $k \neq 1$ であるから

$$y = \frac{2}{3(1-k)}$$

となる。よって実数 k の範囲は $0 < k < 1$ となり、 xy を計算すると

$$xy = \frac{1}{3k} \cdot \frac{2}{3(1-k)} = \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{k(1-k)}$$

となる。ここで $k > 0, 1-k > 0$ であるから相加・相乗平均の関係より、

$$k + (1-k) \geq 2\sqrt{k(1-k)}$$

が成り立つ。ただし等号が成立するのは $k=1-k$ 、すなわち $k=\frac{1}{2}$ のときである。よって

$$\sqrt{k(1-k)} \leq \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow k(1-k) \leq \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{k(1-k)} \geq 4 \quad (\because k(1-k) > 0)$$

である。よって

$$xy = \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{k(1-k)} \geq \frac{8}{9}$$

であるから xy の最小値は $\frac{8}{9}$ である。

(1)

c のとりうる値は3, 4, 5, 6, 7, 8のいずれかである。 $c=3$ のとき考えられる a, b の組は

$$(a, b) = (1, 2)$$

である。 $c=4$ のとき考えられる a, b の組は

$$(a, b) = (1, 3)$$

である。 $c=5$ のとき考えられる a, b の組は

$$(a, b) = (1, 4), (2, 3)$$

である。 $c=6$ のとき考えられる a, b の組は

$$(a, b) = (1, 5), (2, 4)$$

である。 $c=7$ のとき考えられる a, b の組は

$$(a, b) = (1, 6), (2, 5), (3, 4)$$

である。 $c=8$ のとき考えられる a, b の組は

$$(a, b) = (1, 7), (2, 6), (3, 5)$$

である。以上より a, b, c の組の数は12通りである。

(答) 12通り

(2)

c のとりうる値は3から n までの値である。 k を2以上の自然数として

$$c = 2k, 2k-1$$

と表される場合を考える。 $c=2k$ のとき、 $a < b$ を考慮すると、 a は1から $k-1$ までの値をとりうる。このとき a の値1つに対し b の値がただ1つ対応する。つまり

$$(a, b) = (1, 2k-1), (2, 2k-1), \dots, (k-1, k+1)$$

の $k-1$ 通り考えられる。同様に、 $c=2k-1$ のとき、 a は1から $k-1$ までの値をとりうる。このとき a の値1つに対し b の値がただ1つ対応する。つまり

$$(a, b) = (1, 2k-2), (2, 2k-3), \dots, (k-1, k)$$

の $k-1$ 通り考えられる。よって

$$n \geq 3, 3 \leq c \leq n$$

に注意して a, b, c の組の数を n の偶奇で場合分けをして求める。

[1] n が偶数のとき

2以上の自然数 m を用いて $n=2m$ と表せる。このとき

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^m (k-1) + \sum_{k=2}^m (k-1) &= 2 \sum_{k=1}^{m-1} k \\ &= m(m-1) \\ &= \frac{n(n-2)}{4} \end{aligned}$$

である。

[2] n が奇数のとき

同様に m を用いて $n=2m-1$ と表せる。このとき

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{m-1} (k-1) + \sum_{k=2}^m (k-1) &= \sum_{k=1}^{m-2} k + \sum_{k=1}^{m-1} k \\ &= \frac{1}{2}(m-1)(m-2) + \frac{1}{2}m(m-1) \\ &= (m-1)^2 \\ &= \left(\frac{n-1}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

である。

以上[1], [2]より、答えは n が奇数のとき $\left(\frac{n-1}{2}\right)^2$ 通り、 n が偶数のとき $\frac{n(n-2)}{4}$ 通りとなる。

(答) n が奇数のとき $\left(\frac{n-1}{2}\right)^2$ 通り、 n が偶数のとき $\frac{n(n-2)}{4}$ 通り

(1)

$\int_0^1 f(t) dt = a$ とおくと

$$f(x) = x^2 - \frac{3a}{5}x + 4 \quad \dots \textcircled{1}$$

と表せる。よって

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(t) dt &= \int_0^1 \left(t^2 - \frac{3a}{5}t + 4 \right) dt \\ &= \left[\frac{1}{3}t^3 - \frac{3a}{10}t^2 + 4t \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3} - \frac{3a}{10} + 4 \\ &= \frac{13}{3} - \frac{3a}{10} \end{aligned}$$

である。 $a = \frac{13}{3} - \frac{3a}{10}$ を解くと $a = \frac{10}{3}$ となり、 $\textcircled{1}$ に代入すると

$$f(x) = x^2 - 2x + 4$$

となる。この関数の導関数を求めると

$$f'(x) = 2x - 2$$

となる。 $y = x^2 - 2x + 4$ と $y = mx$ が接するから、方程式 $x^2 - (m+2)x + 4 = 0$ は重解を持つ。よって判別式より

$$\begin{aligned} (m+2)^2 - 16 &= 0 \\ \Leftrightarrow m^2 + 4m - 12 &= 0 \\ \Leftrightarrow (m+6)(m-2) &= 0 \\ \therefore m &= -6, 2 \end{aligned}$$

が得られる。接点において、接線の傾き $2x-2$ と直線 ℓ の傾き m が一致するから、 $m = -6$ のとき

$$\begin{aligned} -6 &= 2x - 2 \\ \therefore x &= -2 \end{aligned}$$

となり、 $x > 0$ を満たさず不適である。 $m = 2$ のとき

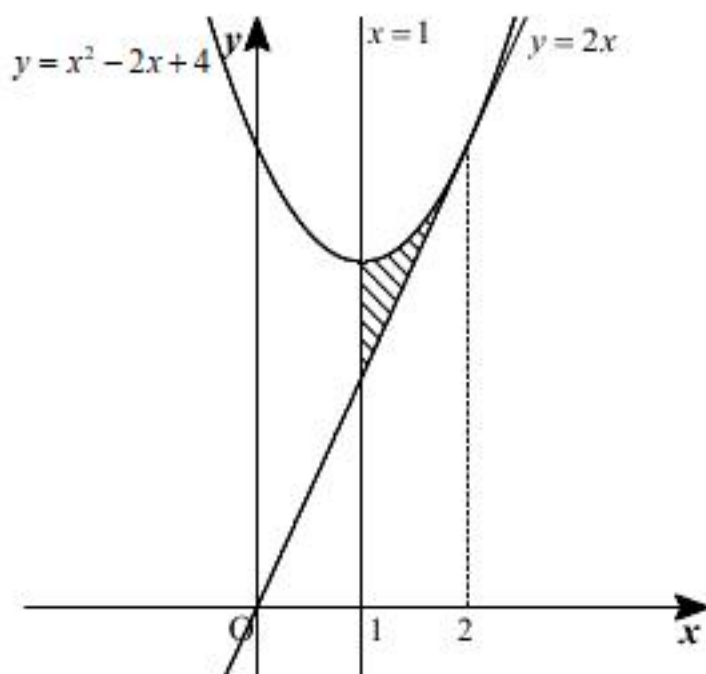
$$\begin{aligned} 2 &= 2x - 2 \\ \therefore x &= 2 \end{aligned}$$

となり、これは $x > 0$ を満たす。よって接点の座標は $(2, 4)$ である。

(答) $m = 2$, 接点の座標 $(2, 4)$

(2)

求める面積は下図の斜線部分である。



よって求める面積は

$$\begin{aligned} \int_1^2 \{ (x^2 - 2x + 4) - 2x \} dx &= \int_1^2 (x-2)^2 dx \\ &= \left[\frac{1}{3}(x-2)^3 \right]_1^2 \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{1}{3}$

(1)

$t \geq 0$ について考えればよいから、 $1+t^a > 0$ より

$$(1+t)^a \leq K(1+t^a) \Leftrightarrow K \geq \frac{(1+t)^a}{1+t^a} \cdots \textcircled{1}$$

である。 $f(t) = \frac{(1+t)^a}{1+t^a}$ において $f(t)$ の増減を求める。 $f'(t)$ は

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{a(1+t)^{a-1}(1+t^a) - (1+t)^a a t^{a-1}}{(1+t^a)^2} \\ &= \frac{a(1+t)^{a-1} \{1+t^a - t^{a-1}(1+t)\}}{(1+t^a)^2} \\ &= \frac{a(1+t)^{a-1}(1-t^{a-1})}{(1+t^a)^2} \end{aligned}$$

となる。 $t \geq 0$ において $f'(t) = 0$ となるのは $a > 1$ より、 $t = 1$ のときである。よって $f(t)$ の増減は以下の表のようになる。

t	0	...	1	...
$f'(t)$		+	0	-
$f(t)$		$\nearrow$		$\searrow$

前表より $t = 1$ のとき $f(t)$ は最大値を取る。すなわち

$$f(t) \leq f(1) = \frac{2^a}{2} = 2^{a-1}$$

である。よって、すべての $t \geq 0$ に対して①を満たす K の最小値は 2^{a-1} である。

(答) 最小値 2^{a-1}

(2)

$a = 10$, $t = \sqrt[5]{1 + \sin x}$ とすると、 $\sqrt[5]{1 + \sin x} \geq 0$ であるから(1)より

$$\left(1 + \sqrt[5]{1 + \sin x}\right)^{10} \leq 2^9 \left\{1 + (1 + \sin x)^2\right\}$$

が成り立つ。よって

$$\int_0^\pi \left(1 + \sqrt[5]{1 + \sin x}\right)^{10} dx \leq \int_0^\pi 2^9 \left\{1 + (1 + \sin x)^2\right\} dx$$

である。ここで

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \left\{1 + (1 + \sin x)^2\right\} dx &= \int_0^\pi (1 + 1 + 2 \sin x + \sin^2 x) dx \\ &= \int_0^\pi \left(2 + 2 \sin x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x\right) dx \\ &= \left[\frac{5}{2}x - 2 \cos x - \frac{1}{4} \sin 2x\right]_0^\pi \\ &= \frac{5}{2}\pi + 2 + 2 \\ &= \frac{5}{2}\pi + 4 \end{aligned}$$

である。 $\pi < 3.15$ より

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \left\{1 + (1 + \sin x)^2\right\} dx &= \frac{5}{2}\pi + 4 \\ &< 11.875 \end{aligned}$$

である。よって

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \left(1 + \sqrt[5]{1 + \sin x}\right)^{10} dx &\leq \int_0^\pi 2^9 \left\{1 + (1 + \sin x)^2\right\} dx \\ &< 2^9 \cdot 11.875 \\ &= 6080 \end{aligned}$$

が成り立つ。よって題意は示された。

(証明終)

(1)

n の偶奇で場合分けをして考える。

[1] n が偶数のとき

自然数 m を用いて $n = 2m$ と書ける。このとき

$$\begin{aligned} 2^n - 1 &= 2^{2m} - 1 \\ &= 4^m - 1 \\ &= (3+1)^m - 1 \\ &= 3^m + {}_m C_1 \cdot 3^{m-1} + {}_m C_2 \cdot 3^{m-2} + \cdots + {}_m C_{m-1} \cdot 3 \end{aligned}$$

となるから、 $2^n - 1$ は 3 の倍数である。

[2] n が奇数のとき

同様に自然数 m を用いて $n = 2m-1$ と書ける。このとき

$$\begin{aligned} 2^n - 1 &= 2^{2m-1} - 1 \\ &= 2(4^{m-1} - 1) + 1 \\ &= 2\{(3+1)^{m-1} - 1\} + 1 \\ &= 3(2 \cdot 3^{m-2} + {}_{m-1} C_1 \cdot 2 \cdot 3^{m-3} + {}_{m-1} C_2 \cdot 2 \cdot 3^{m-4} + \cdots + {}_{m-1} C_{m-2} \cdot 2) + 1 \end{aligned}$$

となるから、 $2^n - 1$ は 3 の倍数とならず不適である。

以上[1], [2]より、 $2^n - 1$ が 3 で割り切れるのは n が偶数のときである。

(答) $n = 2m$ (m は自然数)

(2)

n を 3 で割ったときの余りによって場合分けをする。

[1] $n = 3l$ (l は自然数) のとき

このとき

$$\begin{aligned} n^n - 1 &= (3l)^{3l} - 1 \\ &= 3 \cdot l(3l)^{3l-1} - 1 \end{aligned}$$

より $n^n - 1$ は 3 の倍数とならず不適である。

[2] $n = 3l+1$ (l は 0 以上の整数) のとき

このとき

$$\begin{aligned} n^n - 1 &= (3l+1)^{3l+1} - 1 \\ &= (3l+1)(3l+1)^{3l} - 1 \\ &= 3 \cdot l(3l+1)^{3l} + (3l+1)^{3l} - 1 \end{aligned}$$

となる。ここで

$$(3l+1)^{3l} = (3l)^{3l} + {}_{3l} C_1 (3l)^{3l-1} + \cdots + {}_{3l} C_{3l-1} 3l + 1$$

であるから、 $l \geq 0$ より $s \geq 0$ を満たす整数 s を用いて

$$(3l+1)^{3l} = 3s + 1$$

と表せる。よって

$$n^n - 1 = 3 \cdot l(3l+1)^{3l} + 3s$$

となるから、 $n^n - 1$ は 3 の倍数である。

[3] $n = 3l+2$ (l は 0 以上の整数) のとき

このとき

$$\begin{aligned} n^n - 1 &= (3l+2)^{3l+2} - 1 \\ &= (3l+2)(3l+2)^{3l+1} - 1 \\ &= 3 \cdot l(3l+2)^{3l+1} + 2(3l+2)^{3l+1} - 1 \end{aligned}$$

となる。ここで

$$(3l+2)^{3l+1} = (3l)^{3l+1} + {}_{3l+1} C_1 (3l)^{3l} \cdot 2 + \cdots + {}_{3l+1} C_{3l} 3l \cdot 2^{3l} + 2^{3l+1}$$

である。 $l \geq 0$ より $t \geq 0$ を満たす整数 t を用いて、

$$(3l+2)^{3l+1} = 3t + 2^{3l+1}$$

と表せる。よって

$$\begin{aligned} n^n - 1 &= 3 \cdot l(3l+2)^{3l+1} + 2(3t + 2^{3l+1}) - 1 \\ &= 3\{l(3l+2)^{3l+1} + 2t\} + 2^{3l+2} - 1 \end{aligned}$$

となるから、 $n^n - 1$ が 3 の倍数であるかは $2^{3l+2} - 1$ が 3 の倍数であるかに一致する。(1)より $2^{3l+2} - 1$ が 3 の倍数となるのは $3l+2$ が偶数のときであり、このとき l は偶数である。つまり $k \geq 0$ を満たす整数 k を用いて $l = 2k$ と書けるから、

$$n = 3 \cdot 2k + 2 = 6k + 2$$

のとき $n^n - 1$ は 3 の倍数となる。

以上[1], [2], [3]より、 $k \geq 0$ を満たす整数 k を用いて $n = 3k+1, 6k+2$ のとき $n^n - 1$ は 3 の倍数

となる。

(答) $n = 3k+1, 6k+2$ ($k = 0, 1, 2, \dots$)

(1)

積和公式 $\cos \alpha \cos \beta = \frac{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)}{2}$ より

$$\cos(n+1)\theta \cos \theta = \frac{\cos(n+2)\theta + \cos n\theta}{2}$$

である。よって

$$\begin{aligned} & \cos(n+2)\theta - 2\cos \theta \cos(n+1)\theta + \cos n\theta \\ &= \cos(n+2)\theta - 2 \cdot \frac{\cos(n+2)\theta + \cos n\theta}{2} + \cos n\theta \\ &= 0 \end{aligned}$$

である。以上より題意は示された。

(証明終)

(2)

(1)で示した等式より

$$\begin{aligned} \cos(n+2)\theta &= 2\cos \theta \cos(n+1)\theta - \cos n\theta \\ &= 2x\cos(n+1)\theta - \cos n\theta \end{aligned}$$

となるから、

$$\begin{aligned} \cos 5\theta &= 2x\cos 4\theta - \cos 3\theta \\ \cos 4\theta &= 2x\cos 3\theta - \cos 2\theta \\ \cos 3\theta &= 2x\cos 2\theta - \cos \theta \end{aligned}$$

が成り立つ。また2倍角の公式より

$$\cos 2\theta = 2\cos^2 \theta - 1 = 2x^2 - 1$$

となる。よって

$$\begin{aligned} \cos 5\theta &= 2x\cos 4\theta - \cos 3\theta \\ &= 2x(2x\cos 3\theta - \cos 2\theta) - \cos 3\theta \\ &= 4x^2(2x\cos 2\theta - \cos \theta) - 2x\cos 2\theta - 2x\cos 2\theta + \cos \theta \\ &= 8x^3(2x^2 - 1) - 4x^3 - 4x(2x^2 - 1) + x \\ &= 16x^5 - 20x^3 + 5x \end{aligned}$$

である。

(答) $\cos 5\theta = 16x^5 - 20x^3 + 5x$

(3)

$\theta = \frac{\pi}{10}$ として x^2 の値を求めればよい。このとき $5\theta = \frac{\pi}{2}$ であるから $\cos 5\theta = 0$ である。よって

(2)より

$$16x^5 - 20x^3 + 5x = 0$$

が成り立つ。 $x = \cos \frac{\pi}{10}$ より $x > 0$ であるから $16x^4 - 20x^2 + 5 = 0$ である。 $t = x^2$ とおくと

$$16t^2 - 20t + 5 = 0$$

である。この方程式を解いて

$$t = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 80}}{16} = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{8}$$

である。 $0 < \theta < \frac{\pi}{6}$ より

$$1 > \cos \theta > \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

であるから、

$$\begin{aligned} \frac{3}{4} &< \cos^2 \theta < 1 \\ \therefore \frac{3}{4} &< t < 1 \end{aligned}$$

を満たす。ここで $2 < \sqrt{5} < 3$ より

$$\frac{5 - \sqrt{5}}{8} < \frac{5 - 2}{8} < \frac{3}{4}$$

となり、また

$$\frac{3}{4} < \frac{5 + 2}{8} < \frac{5 + \sqrt{5}}{8} < \frac{5 + 3}{8} = 1$$

となるから、 $t = \frac{5 + \sqrt{5}}{8}$ である。

(答) $\cos^2 \frac{\pi}{10} = \frac{5 + \sqrt{5}}{8}$