

- 1** 2つの放物線 $C_1 : y = x^2$, $C_2 : y = -x^2 + 2ax - 2a^2 - 2a + 2$ (a は定数) が異なる2点で交わっている。次の問いに答えよ。

- (1) 定数 a の範囲を求めよ。
- (2) a が (1) で求めた範囲にあるとき、 C_1 と C_2 で囲まれた図形の面積の最大値を求めよ。必要ならば、次の公式を用いてよい。

$$\int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx = -\frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3 \quad (\alpha, \beta \text{ は定数})$$

(配点 25%)

2 複素数 z, w が $|z| = |w|$, $z \neq 0$, $w \neq 0$, $z + w \neq 0$ を満たすとき, 次の (1), (2), (3) が成り立つことを示せ。

(1) $\frac{w}{z} + \frac{z}{w}$ は実数である。

(2) $\frac{(z + w)^2}{zw}$ は正数である。

(3) 複素数 $z + w$ の偏角を θ とするとき, $w = \bar{z}(\cos 2\theta + i \sin 2\theta)$ である。

(配点 25%)

3 2 曲線 $C_1 : y = \cos x$, $C_2 : y = \cos 2x + a$ ($a > 0$) が互いに接している。
すなわち, C_1, C_2 には共有点があり, その点において共通の接線をもっている。
このとき, 次の問いに答えよ。

- (1) 正数 a の値を求めよ。
- (2) $0 < x < 3\pi$ の範囲で 2 曲線 C_1, C_2 のみで囲まれる図形の全面積を求めよ。
- (3) (2) の図形を x 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積を求めよ。

(配点 25%)

4 a_k, b_k ($k = 1, 2, 3, 4$) は 0 または 1 とする。次の問いに答えよ。

(1) 不等式

$$\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_3}{2^3} + \frac{a_4}{2^4} < \frac{3}{5} < \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_3}{2^3} + \frac{a_4}{2^4} + \frac{1}{2^4}$$

を満たすように a_1, a_2, a_3, a_4 の値を定めよ。

(2) 不等式

$$\frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2^2} + \frac{b_3}{2^3} + \frac{b_4}{2^4} < \log_{10} 7 < \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2^2} + \frac{b_3}{2^3} + \frac{b_4}{2^4} + \frac{1}{2^4}$$

を満たすように b_1, b_2, b_3, b_4 の値を定めよ。

(配点 25%)