

1 2次正方行列 A, B, P が $AP = PB$ を満たすとき、次の問いに答えよ。

- (1) $A^2P = PB^2$ を示せ。
- (2) P が逆行列をもつとき、ある定数 a, b について $A^2 + aA + bE = O$ ならば、 $B^2 + aB + bE = O$ が成り立つことを示せ。ただし、 E は単位行列、 O は零行列を表す。
- (3) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ のとき、 P は逆行列をもたないことを示せ。

(配点 25%)

2 複素数 z, w が $|z| = |w|$, $z \neq 0$, $w \neq 0$, $z + w \neq 0$ を満たすとき, 次の (1), (2), (3) が成り立つことを示せ。

- (1) $\frac{w}{z} + \frac{z}{w}$ は実数である。
- (2) $\frac{(z+w)^2}{zw}$ は正数である。
- (3) 複素数 $z+w$ の偏角を θ とするとき, $w = \bar{z}(\cos 2\theta + i \sin 2\theta)$ である。

(配点 25%)

- 3** 2 曲線 $C_1 : y = \cos x$, $C_2 : y = \cos 2x + a$ ($a > 0$) が互いに接している。
すなわち, C_1, C_2 には共有点があり, その点において共通の接線をもっている。
このとき, 次の問いに答えよ。

- (1) 正数 a の値を求めよ。
- (2) $0 < x < 3\pi$ の範囲で 2 曲線 C_1, C_2 のみで囲まれる図形の全面積を求めよ。
- (3) (2) の図形を x 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積を求めよ。

(配点 25%)