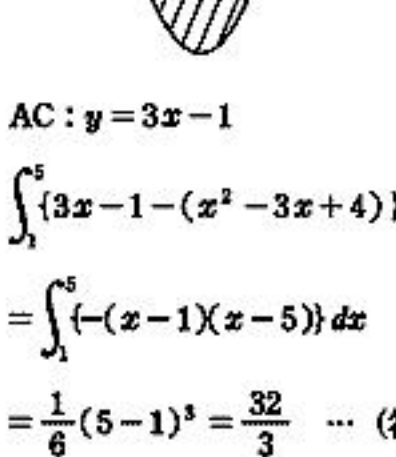


①

- (1) $f(x)=[x^3+6x^2-15x]_1^x$
 $=x^3+6x^2-15x+8 \dots$ (答)
- (2) $f'(x)=3x^2+12x-15$ より
 $(a, a^3+6a^2-15a+8)$
 における接線の方程式は,
 $y=(3a^2+12a-15)(x-a)$
 $+a^3+6a^2-15a+8$
 $= (3a^2+12a-15)x-2a^3-6a^2+8$
 $\dots$ (答)
- (3) $3a^2+12a-15=3(a+2)^2-27$ より
 $a=-2$ のとき
 最小値 -27 をとるから,
 傾き最小のものは,
 $y=-27x \dots$ (答)
- (4) 原点を通るから $-2a^3-6a^2+8=0$
 $\therefore a^3+3a^2-4=(a-1)(a+2)^2=0$
 よって $a=1, -2$
 $a=1$ のとき $y=0$
 $a=-2$ のとき $y=-27x$ } (答)

②

- (1) $\vec{OP}=(1-t)\vec{OA}+t\vec{OB}$
 $\vec{OQ}=(1-t)\vec{OB}+t\vec{OC}$
 よって
 $\vec{OR}=(1-t)\vec{OP}+t\vec{OQ}$
 $= (1-t)\{(1-t)\vec{OA}+t\vec{OB}\}+t\{(1-t)\vec{OB}+t\vec{OC}\}$
 $= (1-t)^2\vec{OA}+2t(1-t)\vec{OB}+t^2\vec{OC} \dots$ (答)
- (2) (1)より R の座標は,
 $((1-t)^2+6t(1-t)+5t^2, 2(1-t)^2+14t^2)$
 $\therefore x=4t+1, y=16t^2-4t+2$
 $\therefore t=\frac{x-1}{4}$
 $\therefore y=16\left(\frac{x-1}{4}\right)^2-4\left(\frac{x-1}{4}\right)+2$
 $=x^2-3x+4$
 $0 \leq t \leq 1$ より $1 \leq x=4t+1 \leq 5$
 よって, R の軌跡の方程式は
 $y=x^2-3x+4 \quad (1 \leq x \leq 5) \dots$ (答)

- (3)
- 
- $AC: y=3x-1$
 $\int_1^5 \{3x-1-(x^2-3x+4)\} dx$
 $= \int_1^5 \{-(x-1)(x-5)\} dx$
 $= \frac{1}{6}(5-1)^3 = \frac{32}{3} \dots$ (答)

③

- (1) $a_n = \frac{n-1}{n+1} a_{n-1} = \frac{n-1}{n+1} \cdot \frac{n-2}{n} \dots \frac{1}{3} a_1$
 $= \frac{2}{n(n+1)} a_1 = \frac{100}{n(n+1)} \dots$ (答)
- (2) $a_n = 100 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$
 $\therefore S_n = 100 \left[\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \right]$
 $= 100 \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{100n}{n+1} \dots$ (答)
- (3) $S_n = 100 \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 100 - \frac{100}{n+1}$
 よって $\frac{100}{n+1}$ が整数で
 かつ最小のとき, S_n が整数で最大。
 よって $n+1$ が 100 の正の約数で最大
 つまり 100 のとき,
 $\frac{100}{n+1}$ は最小 (1)
 よって $n=99$ のとき
 S_n は最大の整数値 99 をとる。
 (答) 99

④

- (1) $a+b+c=0$
 $c=-a-b$ ここで, $c > b$
 $\therefore -b-a > b$
 $\therefore a < b < -\frac{a}{2} \dots$ ①
 $\therefore abc = -ab(a+b)$
 $= -ab^2 - a^2b$
 $= -a \left(b + \frac{a}{2} \right)^2 + \frac{a^3}{4}$
 ①と $-a > 0$ より
 (i) a : 偶数のとき
 $b = -\frac{a}{2} - 1 \quad (> a) (\because a \leq -1)$
 のとき最小値 $\frac{a^3}{4} - a$ をとる。
 (ii) a : 奇数のとき
 $b = -\frac{a+1}{2} \quad (> a) (\because a \leq -1)$
 のとき最小値 $\frac{a^3}{4} - \frac{a}{4}$ をとる。
 (i) のとき
 $a=-2$ なら最小値 $-2+2=0$
 $a=-4$ なら最小値 $-16+4=-12$
 よって $a=-4$ のとき $b=1, c=3$ で
 最小値 -12 をとる。
 (ii) のとき
 $a=-1$ なら最小値 $\frac{-1+1}{4}=0$
 $a=-3$ なら最小値 $\frac{-27+3}{4}=-6$
 $a=-5$ なら最小値 $\frac{-125+5}{4}=-30$
 をとる。
 よって $a=-5$ のとき
 $b=2, c=3$, で最小値 -30 をとる。
 以上より abc は,
 $a=-5, b=2, c=3$, のとき
 最小値 -30 をとる。 $\dots$ (答)
- (2) (1)より, $a=-2n+1$ から
 $b = \frac{-a-1}{2} = n-1, \quad c=n$
 で最小値 $(-2n+1)(n-1)n$
 をとる。
- (3) (i) の (i) のとき
 $f(a) = \frac{a^3}{4} - a$
 とおくと
 $f'(a) = \frac{3}{4}a^2 - 1$
 $n=1$ では $-2n < a < 0n$ 偶数なし
 よって $n \geq 2$ で,
 $a = -2n+2 \quad (\leq -2 < -\frac{2}{\sqrt{3}}), \quad b=n-2, \quad c=n$
 で最小値
 $f(-2n+2) = -2n(n-1)(n-2)$
 をとる。
 (ii) のとき
 $g(a) = \frac{a^3}{4} - \frac{a}{4}$
 とおくと,
 $g'(a) = \frac{3}{4}a^2 - \frac{1}{4}$
 $-1 < -\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad -2n+1 \leq a \leq -1$
 より
 $a = -2n+1$ で最小値
 $g(-2n+1) = (-2n+1)(n-1)n$
 をとる。
 $f(-2n+2) - g(-2n+1)$
 $= 3n(n-1) \geq 0 \quad (\because n \geq 1)$
 よって
 最小値は, $(-2n+1)(n-1)n$