

1

(1)

$$\begin{aligned}\overline{OK} &= t\overline{b} \\ \overline{OL} &= t\overline{c} \\ \overline{AM} &= t\overline{AB} = t(\overline{b} - \overline{a}) \\ \overline{AN} &= t\overline{AC} = t(\overline{c} - \overline{a})\end{aligned}$$

であるので、

$$\begin{aligned}\overline{KL} &= \overline{OL} - \overline{OK} = t(\overline{c} - \overline{b}) \\ \overline{MN} &= \overline{AN} - \overline{AM} = t(\overline{c} - \overline{b})\end{aligned}$$

である。したがって向かい合う二組の辺が平行かつ長さが等しいので、四角形KLMNは平行四辺形である。

(証明終)

(2)

$$\begin{aligned}\overline{KM} &= \overline{OM} - \overline{OK} \\ &= \overline{OA} + \overline{AM} - \overline{OK} \\ &= \overline{a} + t(\overline{b} - \overline{a}) - t\overline{b} \\ &= (1-t)\overline{a}\end{aligned}$$

であるので、

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{\overline{KL} \cdot \overline{KM}}{\|\overline{KL}\| \|\overline{KM}\|} \\ &= \frac{t(\overline{c} - \overline{b}) \cdot (1-t)\overline{a}}{t\|\overline{c} - \overline{b}\| \cdot (1-t)\|\overline{a}\|} \\ &= \frac{\overline{a} \cdot (\overline{c} - \overline{b})}{\|\overline{a}\| \|\overline{c} - \overline{b}\|}\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{\overline{a} \cdot (\overline{c} - \overline{b})}{\|\overline{a}\| \|\overline{c} - \overline{b}\|}$$

(3)

$$\begin{aligned}\|\overline{a}\| &= \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 0} \\ &= \sqrt{5} \\ \|\overline{c} - \overline{b}\| &= \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + 2^2} \\ &= 3 \\ \overline{a} \cdot (\overline{c} - \overline{b}) &= 2 \times (-2) + (-1)^2 + 0 \\ &= -3\end{aligned}$$

であるので、

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{-3}{3\sqrt{5}} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{5}}\end{aligned}$$

となる。したがって

$$\begin{aligned}\sin\theta &= \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2} \\ &= \frac{2}{\sqrt{5}}\end{aligned}$$

となる。(∵ 0° < θ < 180° より sinθ > 0)

平行四辺形KLMNの面積は三角形KLMの面積の2倍であるから、

$$\begin{aligned}\text{KL} \cdot \text{KM} \sin\theta &= 3t \cdot \sqrt{5} (1-t) \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} \\ &= 6t(1-t)\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad 6t(1-t)$$

2

(1)

$$\begin{aligned}A &= \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & a \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & a \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2+2a \\ 1 & 4+3a \end{pmatrix}\end{aligned}$$

である。Aが逆行列をもたないので、

$$\begin{aligned}4+3a-(2+2a) &= 2+a=0 \\ \therefore a &= -2\end{aligned}$$

となり、

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

である。

$$(\text{答}) \quad a = -2, A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

(2)

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ z+w=1 \end{cases}\end{aligned}$$

である。y=1-x, w=1-z より、

$$\begin{aligned}xw-yz &= x(1-z)-(1-x)z \\ &= x-z \\ &= 1 \\ \therefore x &= 1+z, y = -z\end{aligned}$$

となる。したがって

$$X = \begin{pmatrix} 1+z & -z \\ z & 1-z \end{pmatrix}$$

である。

$$(\text{答}) \quad X = \begin{pmatrix} 1+z & -z \\ z & 1-z \end{pmatrix}$$

(3)

$$\begin{aligned}X^2 &= \begin{pmatrix} 1+z & -z \\ z & 1-z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+z & -z \\ z & 1-z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1+2z & -2z \\ 2z & 1-2z \end{pmatrix}\end{aligned}$$

であるので、

$$X^n = \begin{pmatrix} 1+nz & -nz \\ nz & 1-nz \end{pmatrix} \quad \cdots \textcircled{1}$$

と推測できる。これを数学的帰納法で証明する。

[1] n=1のとき

(2)の結果より、①は成り立つ。

[2] n=kで①が成り立つとき

$$\begin{aligned}X^{k+1} &= X^k \cdot X \\ &= \begin{pmatrix} 1+kz & -kz \\ kz & 1-kz \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+z & -z \\ z & 1-z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1+(k+1)z & -(k+1)z \\ (k+1)z & 1-(k+1)z \end{pmatrix}\end{aligned}$$

となり、n=k+1のときも①は成り立つ。

以上、[1], [2]より、すべてのnで

$$X^n = \begin{pmatrix} 1+nz & -nz \\ nz & 1-nz \end{pmatrix}$$

が成り立つことが示された。

(証明終)

3

(1)

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} - a \\ f''(x) &= \frac{e^x - e^{-x}}{2}\end{aligned}$$

である。x>0において

$$e^x > e^{-x}$$

であるので、

$$f''(x) > 0$$

となり、f'(x)はx>0で単調増加する。よって

$$f'(x) > f'(0) = 1-a$$

である。

[1] a≦1のとき

$$f'(x) > 0$$

であるのでf(x)はx>0で単調増加する。よって

$$f(x) > f(0) = 0$$

となり、f(x)=0は正の解をもたない。

[2] a>1のとき

$$f'(0) < 0$$

であるので、f'(x)=0となるxが1つだけ存在する。それをαとおくと増減表は以下のようになる。

x	0	⋯	α	⋯
f'(x)		-	0	+
f(x)	0	↘		↗

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ x \left(\frac{e^x}{2x} - a \right) - \frac{e^{-x}}{2} \right\} \\ &= \infty\end{aligned}$$

$$(\because \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x} = \infty)$$

となるので、f(x)=0となるxが1つだけ存在する。

$$(\text{答}) \quad a \leq 1 \text{ のとき } 0 \text{ 個, } a > 1 \text{ のとき } 1 \text{ 個}$$

(2)

$$\begin{aligned}V(a) &= \int_0^1 \pi |f(x)|^2 dx \\ &= \pi \int_0^1 \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} - ax \right)^2 dx \\ &= \pi \int_0^1 \left(\frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} - ax(e^x - e^{-x}) + a^2 x^2 \right) dx \\ &= \pi \left[\frac{1}{4} \left(\frac{e^{2x}}{2} - 2x - \frac{e^{-2x}}{2} \right) + \frac{a^2 x^3}{3} \right]_0^1 - \pi \int_0^1 ax(e^x - e^{-x}) dx \\ &= \pi \left(\frac{e^2}{8} - \frac{1}{2} - \frac{1}{8e^2} + \frac{a^2}{3} \right) - \pi \left\{ [ax(e^x + e^{-x})]_0^1 - \int_0^1 a(e^x + e^{-x}) dx \right\} \\ &= \pi \left(\frac{e^2}{8} - \frac{1}{2} - \frac{1}{8e^2} + \frac{a^2}{3} \right) - \pi \left\{ a \left(e + \frac{1}{e} \right) - [a(e^x - e^{-x})]_0^1 \right\} \\ &= \pi \left(\frac{e^2}{8} - \frac{1}{2} - \frac{1}{8e^2} - \frac{2a}{e} + \frac{a^2}{3} \right)\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \pi \left(\frac{e^2}{8} - \frac{1}{2} - \frac{1}{8e^2} - \frac{2a}{e} + \frac{a^2}{3} \right)$$

(3)

$$\begin{aligned}V'(a) &= 2\pi \left(\frac{a}{3} - \frac{1}{e} \right)\end{aligned}$$

であるので、増減表は以下の通りになる。

a	⋯	$\frac{3}{e}$	⋯
V'(a)	-	0	+
V(a)	↘		↗

したがってa= $\frac{3}{e}$ のときV(a)は最小値をとる。

$$(\text{答}) \quad a = \frac{3}{e}$$

4

(1)

$$t_k = 2 + \frac{k}{n}(x-2)$$

と表せる。(k=0,1,2,⋯,n) よって、

$$\begin{aligned}F(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \log \left\{ 2 + \frac{k}{n}(x-2) \right\} \\ &= \int_0^1 \log \{ 2 + (x-2)t \} dt \\ &= \left[\frac{2+(x-2)t}{x-2} \log \{ 2 + (x-2)t \} \right]_0^1 - \int_0^1 dt \\ &= \frac{x \log x - 2 \log 2}{x-2} - 1\end{aligned}$$

となる。したがって

$$\begin{aligned}F(4) &= \frac{4 \log 4 - 2 \log 2}{2} - 1 \\ &= 3 \log 2 - 1\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad 3 \log 2 - 1$$

(2)

$$\begin{aligned}F'(x) &= \frac{(\log x + 1)(x-2) - (x \log x - 2 \log 2)}{(x-2)^2} \\ &= \frac{x-2-2(\log x - \log 2)}{(x-2)^2}\end{aligned}$$

である。g(x)=x-2-2(log x-log 2)とおくと、x>2において

$$g'(x) = 1 - \frac{2}{x} > 0$$

であるのでg(x)は単調増加する。よって

$$g(x) > g(2) = 0$$

であるのでF'(x)>0となり、F(x)は単調増加する。

$$(\text{答}) \quad F(x) \text{ は単調増加する。}$$

(3)

$$h(x) = x \log x$$

とおくと

$$h'(x) = \log x + 1$$

である。導関数の定義より、

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} F(x) &= \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x \log x - 2 \log 2}{x-2} - 1 \right) \\ &= h'(2) - 1 \\ &= \log 2\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \log 2$$