

1 座標空間内に四面体 OABC があり、 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とする。 $0 < t < 1$ を満たす t に対し、辺 OB, OC を $t : (1 - t)$ の比に内分する点をそれぞれ K, L とし、辺 AB, AC を $t : (1 - t)$ の比に内分する点をそれぞれ M, N とする。次の問いに答えよ。

(1) 四角形 KLMN は平行四辺形であることを示せ。

(2) $\overrightarrow{KL}$, $\overrightarrow{KM}$ のなす角を θ とするとき、 $\cos \theta$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ。

(3) $\vec{a} = (2, -1, 0)$, $\vec{b} = (1, 2, 0)$, $\vec{c} = (-1, 1, 2)$ とするとき、平行四辺形 KLMN の面積を t を用いて表せ。

(配点 25 %)

2 2次正方行列 A が, ある数 a に対して

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & a \end{pmatrix}$$

を満たしている。次の問いに答えよ。

(1) A が逆行列をもたないとき, a と A を求めよ。

(2) (1) の a と A に対して 2 次正方行列 $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ が, $xw - yz = 1$ および

$$XA = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & a \end{pmatrix}$$

を満たすとき, X を z を用いて表せ。

(3) n を自然数とする。(2) で得られた X について X^n を推測し, その推測が正しいことを数学的帰納法を用いて証明せよ。

(配点 25 %)

3 a を定数とし、関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} - ax$$

で定義する。次の問いに答えよ。

- (1) 方程式 $f(x) = 0$ の正の解の個数を調べよ。必要ならば、 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x} = \infty$ を用いてよい。
- (2) 連立不等式

$$0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq |f(x)|$$

の表す領域を、 x 軸のまわりに回転してできる立体の体積 $V(a)$ を求めよ。

- (3) $V(a)$ が最小値をとるときの a の値を求めよ。

(配点 25 %)

4 $x > 2$ とする。区間 $[2, x]$ を n 等分して、その両端と分点を順に

$$2 = t_0, t_1, \dots, t_n = x$$

とし、極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \log t_k$ の値を $F(x)$ とする。次の問いに答えよ。

- (1) $F(4)$ を求めよ。
- (2) $x > 2$ における関数 $F(x)$ の増減を調べよ。
- (3) $\lim_{x \rightarrow 2} F(x)$ を求めよ。

(配点 25 %)