

1

$$(1) \quad \vec{a} + \vec{b} = (3, x-1), \quad 2\vec{a} - 3\vec{b} = (-4, 2x+3) \quad \text{und} \quad \vec{a} \perp \vec{c}.$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) \perp (2\vec{a} - 3\vec{b})$$

$$\Leftrightarrow (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (2\vec{a} - 3\vec{b}) = -12 + (x-1)(2x+3)$$

$$= 2x^2 + x - 15 = (x+3)(2x-5) = 0$$

$$\Leftrightarrow \underline{x = -3, \quad x = \frac{5}{2}}$$

$$(2) \quad (\vec{a} + \vec{b}) \parallel (2\vec{a} - 3\vec{b})$$

$$\Leftrightarrow 3 : (x-1) = (-4) : (2x+3)$$

$$\Leftrightarrow 3(2x+3) = (x-1)(-4)$$

$$\Leftrightarrow 6x+9 = -4x+4 \Leftrightarrow 10x = -5 \Leftrightarrow \underline{x = -\frac{1}{2}}$$

[2]

$$(1) x^2 + x - 2 = 2x - 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \text{ の 2 解 } \alpha, \beta \text{ がある.}$$

$$(\beta - \alpha)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = 1^2 - 4(-1) = 5$$

$$\Rightarrow \beta - \alpha = \sqrt{5} (>0 \text{ } \because \alpha < \beta)$$

$$\therefore \begin{cases} \beta^2 - \alpha^2 = (\beta - \alpha)(\beta + \alpha) = \sqrt{5} \times 1 = \sqrt{5} \\ \beta^3 - \alpha^3 = (\beta - \alpha)(\beta^2 + \beta\alpha + \alpha^2) \\ = (\beta - \alpha)\{(\alpha + \beta)^2 - \alpha\beta\} = \sqrt{5}\{1^2 - (-1)\} = 2\sqrt{5} \end{cases}$$

(2) 求める面積は

$$\begin{aligned} & \int_{\alpha}^{\beta} \{2x - 1 - (x^2 + x - 2)\} dx \\ &= - \int_{\alpha}^{\beta} (x^2 - x - 1) dx = - \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx \\ &= - \int_0^{\beta - \alpha} x \{x - (\beta - \alpha)\} dX \\ &= \frac{(\beta - \alpha)^2}{2} - \frac{(\beta - \alpha)^3}{3} = \frac{(\beta - \alpha)^3}{6} = \frac{5\sqrt{5}}{6} \end{aligned}$$

(3) $(x^2 + x - 2)' = 2x + 1$ であり, l と平行になる接線の x 座標を x とすれば, $2x + 1 = 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ (l の傾きは 2) である。

よって, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 2)$ における接線を求める。

$$y = 2(x - \frac{1}{2}) - \frac{5}{4} = 2x - \frac{9}{4}$$

よって, これと x 軸との交点として $(\Delta, 0)$ を求める。

$$0 = 2\Delta - \frac{9}{4} \Leftrightarrow \Delta = \frac{9}{8}$$

接線の一般型は

$$\begin{aligned} y &= (2x + 1)(x - t) + t^2 + t - 2 \\ &= (2t + 1)x - t^2 - 2 \end{aligned}$$

であり, これが $(\frac{9}{8}, 0)$ を通るとき,

$$0 = (2t + 1) \cdot \frac{9}{8} - t^2 - 2$$

$$\Leftrightarrow 8t^2 - 18t + 7 = (2t - 1)(4t - 7) = 0$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{1}{2}, t = \frac{7}{4}$$

よって, 求める 2 本の接線は前者の $y = 2x - \frac{9}{4}$ と

$$y = (\frac{7}{2} + 1)x - \frac{49}{16} - 2 = \frac{9}{2}x - \frac{81}{16}$$

3

(1) $z + \frac{1}{z}$ が実数 $\Rightarrow a z^n$

$$z + \frac{1}{z} = \overline{z + \frac{1}{z}} = \bar{z} + \frac{1}{\bar{z}}$$

$$\Leftrightarrow \left(z + \frac{1}{z}\right) \times z \bar{z} = \left(\bar{z} + \frac{1}{\bar{z}}\right) \times z \bar{z}$$

$$\Leftrightarrow z \times |z|^2 + \bar{z} = \bar{z} \times |z|^2 + z$$

$$\Leftrightarrow (z - \bar{z}) \times |z|^2 - (z - \bar{z})$$

$$= (z - \bar{z})(|z|^2 - 1) = 0$$

今、 $z \neq \bar{z} \Rightarrow a z^n$, $\therefore a$ 式より $|z|^2 = 1$ を得る。

すなわち、 $a^2 + \frac{1}{a^2} = 1 \Leftrightarrow a^2 = \frac{1}{2}$ であり、 $a > 0$ として $a z^n$ であり、求める a は $\frac{1}{\sqrt{2}}$ である。

(2) (1) より、 $z = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i = \cos 45^\circ + i \sin 45^\circ$ とする。

$$z^8 = \cos 360^\circ + i \sin 360^\circ = 1 \quad (\text{ド・モアビル定理})$$

$$\Rightarrow a z^n, \quad z^{30} = z^6 = \cos 270^\circ + i \sin 270^\circ = -i \text{ である。}$$

$$\therefore z, \quad z^{30} + \frac{1}{z^{30}} = (-i) + \frac{1}{-i} = -i + i = \underline{0} \text{ となる。}$$

4

(1) $\angle A = \theta$ と書けば、右図の要領で;

$$DA = DB \text{ である } \angle DBA = \theta$$

$$\Rightarrow \angle BDC = 2\theta$$

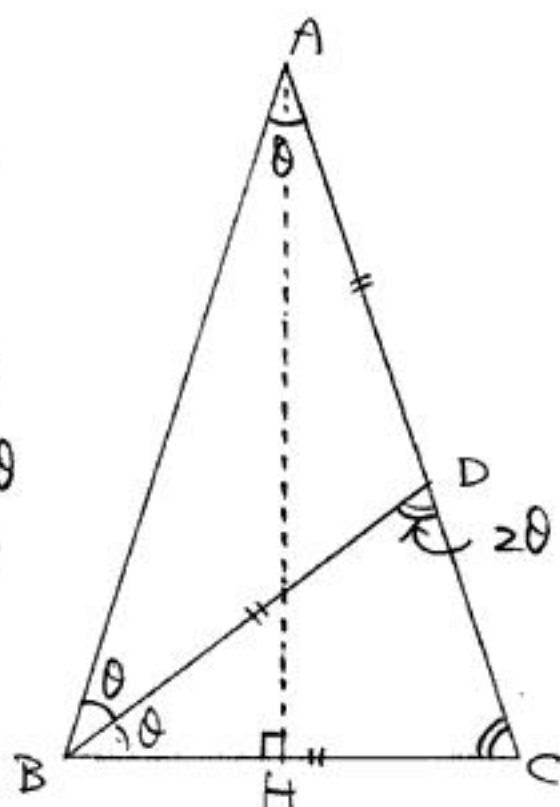
(外角と内角の関係)

$$\Rightarrow BD = BC \text{ である } \angle C = 2\theta$$

$$\Rightarrow AB = AC \text{ である } \angle B = 2\theta$$

$$\therefore \theta + 2\theta + 2\theta = 5\theta = 180^\circ$$

$$\Leftrightarrow \underline{\theta = 36^\circ}$$



(2) A から BC へ下した垂線の足を H とすれば $BH = \frac{1}{2}$ であり、
 $\angle BAH = 18^\circ$

$$\text{よって, } \sin \angle BAH = \frac{BH}{AB} = \frac{1}{2AB} \text{ である。}$$

$\triangle ABC \sim \triangle BCD$ である、 $AB = AC = x$ とおいて、相似比を考えると:

$$AB : BC = BC : CD$$

$$\Leftrightarrow x : 1 = 1 : (x - 1)$$

$$\Leftrightarrow x(x - 1) = 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0$$

$$\therefore AB = x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} (> 0)$$

$$\text{よって, } \sin 18^\circ = \frac{BH}{AB} = \frac{1}{1 + \sqrt{5}} = \underline{\frac{\sqrt{5} - 1}{4}}$$

$$(3) \sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \text{ (和積公式を利用)}$$

$$= 2 \sin \frac{180^\circ - 72^\circ}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$= 2 \sin (90^\circ - 36^\circ) \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$= 2 \cos 36^\circ \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

と変形されて、 $\cos 36^\circ > 0$ である $\cos \frac{\alpha - \beta}{2}$ が最大になるとき

が $\sin \alpha + \sin \beta$ の最大値をとる。

$\cos \frac{\alpha - \beta}{2}$ は明らかに $\alpha = \beta$ であるとき最大値 1 をとるので、

求める最大値は、 $\triangle ABC$ の余弦定理から

$$2 \cos 36^\circ = 2 \times \frac{x^2 + x^2 - 1}{2x^2} = 2 \left(1 - \frac{1}{2x^2} \right)$$

$$= 2 - \frac{1}{x^2} = 2 - \left(\frac{2}{1 + \sqrt{5}} \right)^2$$

$$= 2 - \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2} \right)^2 = 2 - \frac{6 - 2\sqrt{5}}{4}$$

$$= 2 - \frac{3 - \sqrt{5}}{2} = \underline{\underline{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}}}$$