

1

$$(1) \vec{a} + \vec{b} = (3, x-1), 2\vec{a} - 3\vec{b} = (-4, 2x+3) \text{ である。}$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) \perp (2\vec{a} - 3\vec{b})$$

$$\Leftrightarrow (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (2\vec{a} - 3\vec{b}) = -12 + (x-1)(2x+3) \\ = 2x^2 + x - 15 = (x+3)(2x-5) = 0$$

$$\Leftrightarrow \underline{x = -3, x = \frac{5}{2}}$$

$$(2) (\vec{a} + \vec{b}) \parallel (2\vec{a} - 3\vec{b})$$

$$\Leftrightarrow 3 : (x-1) = (-4) : (2x+3)$$

$$\Leftrightarrow 3(2x+3) = (x-1)(-4)$$

$$\Leftrightarrow 6x+9 = -4x+4 \Leftrightarrow 10x = -5 \Leftrightarrow \underline{x = -\frac{1}{2}}$$

$$(3) |\vec{a}| = \sqrt{1+x^2}, |\vec{b}| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5} \text{ であり, } \vec{a} \cdot \vec{b} = 2-x$$

$$\text{である。} \vec{a} \text{ と } \vec{b} \text{ のなす角は } \frac{\pi}{3} \text{ である。}$$

$$\sqrt{1+x^2} \times \sqrt{5} \times \cos \frac{\pi}{3} = 2-x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{5(1+x^2)} = 2(2-x)$$

$$\therefore 5(1+x^2) = 4(2-x)^2; 2-x > 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 16x - 11 = 0; x < 2$$

$$\therefore \text{求める } x \text{ は } \underline{-8 \pm \sqrt{64+11} = -8 \pm 5\sqrt{3}} \text{ である。}$$

2

$$(1) \quad A^2 - 5A + 6E = (A - 2E)(A - 3E) \quad \text{-----} A \text{ と } E \text{ は交換可能}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2 & 2-2 \\ -2+2 & -2+2 \end{pmatrix} = 0$$

(注) 「ハミルトン・ケリーの定理により -----」 でも良いでしょう。

$$(2) \quad x^{12} - 19x^{10} + 30x^9 + x^2 - 4x + 3 \text{ を } x^2 - 5x + 6 \text{ で割ると}$$

$$\begin{array}{r}
\begin{array}{r}
x^{10} + 5x^9 \\
+ 1
\end{array} \\
x^2 - 5x + 6 \overline{) x^{12} - 19x^{10} + 30x^9 + x^2 - 4x + 3} \\
\underline{x^{12} - 5x^{11} + 6x^{10}} \\
5x^{11} - 25x^{10} + 30x^9 \\
\underline{5x^{11} - 25x^{10} + 30x^9} \\
x^2 - 4x + 3 \\
\underline{x^2 - 5x + 6} \\
x - 3
\end{array}$$

よって、その余りは $x - 3$ である。

よって、 $\{E, A, A^2, \dots\}$ の種に関する交換可能であることが、

$$\begin{aligned}
\text{与式} &= (A^{10} + 5A^9 + E)(A^2 - 5A + 6E) + A - 3E \\
&= A - 3E = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \\
&= \underline{\underline{\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}}
\end{aligned}$$

$$(3) \quad A^4 + aA + bE = 0 \quad a \text{ と } b \text{ が } A^4 = (A^2)^2 = -aA - bE, \text{ である}$$

$$A^2 = 5A - 6E \text{ である:}$$

$$\begin{aligned}
(5A - 6E)^2 &= 25A^2 - 60A + 36E \\
&= 25(5A - 6E) - 60A + 36E \\
&= 65A - 114E = -aA - bE
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (65 + a)A = (114 - b)E$$

よって、 A は E の定数倍でないから、

$$65 + a = 0, 114 - b = 0$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{a = -65, b = 114}}$$

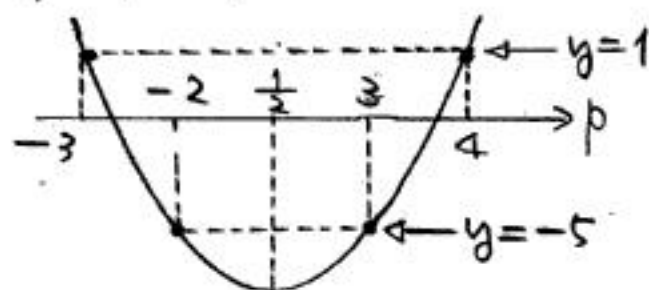
3

$$(1) f(x) = 4x^2 + 4px + p + 11 \text{ 恒正}$$

$$\frac{D}{4} = (2p)^2 - 4(p+11) = 4(p^2 - p - 11) > 0$$

p は整数だから右図より

$$\underline{p \leq -3, p \geq 4}$$



$$(2) f(x) = 4(x^2 + px) + p + 11 = 4\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - p^2 + p + 11$$

(i) p が奇数のとき, (ii) p が偶数のとき

$$f\left(-\frac{p}{2} \pm \frac{1}{2}\right) \geq 0 \text{ が必要}$$

必要十分条件は

$$4\left(\pm \frac{1}{2}\right)^2 - p^2 + p + 11$$

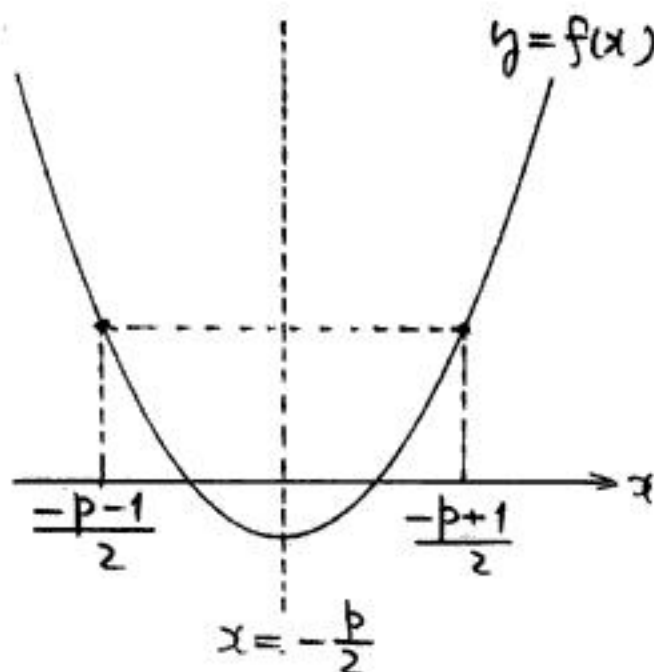
$$= -p^2 + p + 12$$

$$= -(p+3)(p-4) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow -3 \leq p \leq 4$$

(i) の結果とあわせると

$$\underline{p = -3} \text{ (} p \text{ は奇数)}$$



(ii) p が偶数のとき, (ii') p が奇数のとき

$$-p^2 + p + 11 = 0 \Leftrightarrow p^2 - p - 11 = 0$$

必要十分条件となる p は存在しない。これをみたす整数は存在しない。

以上より, 求める p は -3 である。

4

$$(1) f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = (1+x^2)^{-\frac{1}{2}},$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{3}{2}} \times 2x = -\frac{x}{(\sqrt{1+x^2})^3}$$

(2) $f'(x)$ の符号は $x=0$ の前後で変化する. その変化の正負から見て, $f(x)$ は $x=0$ で極大値 1 をとる.

$$f'(x) = -x(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$\Rightarrow f''(x) = -(1+x^2)^{-\frac{3}{2}} - x \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)(1+x^2)^{-\frac{5}{2}} \cdot 2x$$

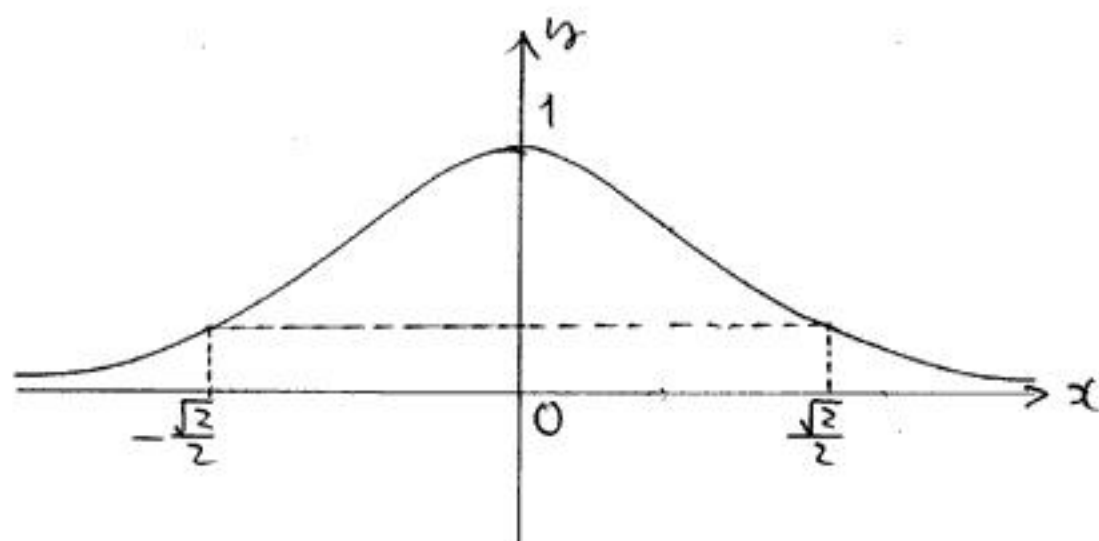
$$= \frac{3x^2 - (1+x^2)}{(\sqrt{1+x^2})^5} = \frac{2x^2 - 1}{(\sqrt{1+x^2})^5}$$

よって, $f(x)$ は $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ において変曲点をもつ. したがって

$$\left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \left(\pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$$

$x \rightarrow \pm\infty$ のとき $f(x) \rightarrow +0$ であり, $f(-x) = f(x)$ であるからグラフは y 軸に関して対称である.

以上より, 次の概形を得る.



(3) $A(a, f(a))$ における接線は

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

$$= -\frac{a}{(\sqrt{1+a^2})^3}(x-a) + \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$$

$$= -\frac{a}{(\sqrt{1+a^2})^3}x + \frac{a^2 + (1+a^2)}{(\sqrt{1+a^2})^3}$$

$$= -\frac{a}{(\sqrt{1+a^2})^3}x + \frac{2a^2 + 1}{(\sqrt{1+a^2})^3}$$

(4) $B(a, 0)$ あり $C\left(\frac{2a^2+1}{a}, 0\right)$ であり,

$$BC = \left| \frac{2a^2+1}{a} - a \right| = \left| a + \frac{1}{a} \right|$$

であるから, $BC = 2OB$ であるから

$$\left| a + \frac{1}{a} \right| = 2|a| \Leftrightarrow |a| \times \left| 1 + \frac{1}{a^2} \right| = 2|a|$$

$$\Leftrightarrow \left| 1 + \frac{1}{a^2} \right| = 1 + \frac{1}{a^2} = 2$$

$$\Leftrightarrow a^2 = 1 \Leftrightarrow a = \pm 1$$