1

(1) 二項定理より,

$$(1+x)^k = \sum_{i=0}^{k} {}_kC_i x^i$$

であるから,x^2 の係数は,${}_kC_2 = \dfrac{k(k-1)}{2} \cdots$(答) である.

(2)

(i)(1) の結果より,

$$a_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{k(k-1)}{2}$$

である.$(k+1)k(k-1) - k(k-1)(k-2) = 3k(k-1)$ なので,

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k=2}^{n} \left\{ \frac{(k+1)k(k-1)}{6} - \frac{k(k-1)(k-2)}{6} \right\} \\ &= \frac{n(n-1)(n+1)}{6} \cdots (\text{答}) \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{6}{n(n-1)(n+1)} \\ &= 3\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right) - 3\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n-1}\right) \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned} S_n &= 3\sum_{k=2}^{n} \left\{ \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k}\right) - \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k-1}\right) \right\} \\ &= 3\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right) - 3\left(\frac{1}{2} - 1\right) \\ &= 3\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right) \cdots (\text{答}) \end{aligned}$$

2

(1)AB と DC は平行なので,$\overrightarrow{AB}=k\vec{y}\,(k>1)$ と書くことができる. ここで,この台形は等脚台形だから,

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$$

である. ここで, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}$ なので,$\overrightarrow{BC}=\vec{x}+(1-k)\vec{y}$ を得る. 従って,

$$k\vec{y}\cdot\vec{x}=-k\vec{y}\cdot\{\vec{x}+(1-k)\vec{y}\}$$

となり, これを k について解くと,$k=2\vec{x}\cdot\vec{y}+1$ である. よって, $AB=2\vec{x}\cdot\vec{y}+1\cdots$(答) を得る.

(2) 点 P は AC 上にあるので,$\overrightarrow{AP}=l(\vec{x}+\vec{y})\,(l>0)$ とおくことができる. 一方,P は BD 上にあるので,

$$\overrightarrow{AP}=k\lambda\vec{y}+(1-\lambda)\vec{x}$$

でもある. ここで,$k=2\vec{x}\cdot\vec{y}+1$ とする. この 2 つの式より,

$$\begin{cases}1-\lambda=l\\ k\lambda=l\end{cases}$$

を得るので, ここから,$l=\dfrac{k}{k+1}$ を得る. 従って,

$$\overrightarrow{AP}=\left(1-\frac{1}{2\vec{x}\cdot\vec{y}+2}\right)(\vec{x}+\vec{y})\cdots(\text{答})$$

である.

(3) 四角形 ABCD は等脚台形なので,AB の垂直二等分線上を対称軸に持ち,P はその対称軸上にある.AB の中点を M とすると,PM は三角形 ABP の高さであるから, 三平方の定理より,

$$\begin{aligned}PM^2&=AP^2-AM^2\\&=-\frac{k^2}{4}+l^2|\vec{x}+\vec{y}|^2\\&=-\frac{k^2}{4}+l^2(2+2\vec{x}\cdot\vec{y})\\&=-\frac{k^2}{4}+l^2(k+1)\\&=-\frac{k^2}{4}+\frac{k^2}{k+1}\end{aligned}$$

である. ここで,$k=2\vec{x}\cdot\vec{y}+1=\sqrt{3}+1$ であるから, 代入して, $PM^2=1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ すなわち,$PM=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$ である. よって, 求める面積は,

$$\frac{1}{2}\cdot(\sqrt{3}+1)\frac{\sqrt{3}-1}{2}=\frac{1}{2}\cdots(\text{答})$$

3

(1)
(i)$y' = a^x \log a$ であるから,l の方程式は,

$$l : y = x \log a + 1$$

である. また,m の傾きは $-\dfrac{1}{\log a}$ なので,

$$m : y = -\frac{1}{\log a}x + 1$$

である. よって,l と x 軸の交点は $\left(-\frac{1}{\log a}, 0\right)$ であり, m と x 軸の交点は $(\log a, 0)$ なので, 求める面積は,

$$S(a) = \frac{1}{2}\left(\log a + \frac{1}{\log a}\right) \cdots (答)$$

である.
(ii)$a > 1$ であるから,$\log a > 0$ なので, 相加相乗平均不等式より,

$$S(a) \geqq \sqrt{\log a \cdot \frac{1}{\log a}} = 1$$

である. この不等式の等号は $\log a = \dfrac{1}{\log a}$, つまり,$a = e$ のとき成立するから,$S(a)$ は $a = e$ のときに最小値 1 をとる.
(2)
(i)

$$\begin{aligned} I(a) &= \left[\frac{a^x}{\log a}\right]_0^2 \\ &= \frac{a^2 - 1}{\log a} \cdots (答) \end{aligned}$$

(ii)

$$\lim_{a \to 1} \frac{\log a}{a - 1} = (\log x)'|_{x=1} = 1$$

であるから,

$$\lim_{a \to 1} I(a) = \lim_{a \to 1} (a + 1)\frac{a - 1}{\log a} = 2 \cdots (答)$$

を得る.

4

(1) 条件 $BA=E$ の両辺の成分を比較して,

$$\begin{cases} a^2+c^2=b^2+d^2=1 \\ ab+cd=0 \end{cases}$$

である. 一方,

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$$

なので,$X=ax+by, Y=cx+dy$ となる. よって,

$$\begin{aligned} X^2+Y^2 &= (ax+by)^2+(cx+dy)^2 \\ &= (a^2+c^2)x^2+2(ab+cd)xy+(b^2+d^2)y^2 \\ &= x^2+y^2 \end{aligned}$$

となって, 題意を得る.

(2)$(ad-bc)^2=1$ を証明すればよい.$(a^2+c^2)(b^2+d^2)=1$ であるが,

$$(a^2+c^2)(b^2+d^2)=(ad-bc)^2+(ab+cd)^2=(ad-bc)^2$$

なので, 題意を得る.

(3)$a^2+c^2=b^2+d^2=1$ なので,$a=\cos\alpha, c=\sin\alpha, b=\cos\beta, d=\sin\beta$ とおくことができる. このとき,$ab+cd=0$ なので,

$$\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha-\beta)=0$$

であるから,$\alpha-\beta=\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\pi$($n$ は整数) と書ける.n が偶数ならば,

$$a=d, b=-c$$

であるし,n が奇数ならば,

$$a=-d, b=c$$

となるので, 題意を得る.

(4) 今,$|ad-bc|=a^2+b^2=1$ なので,$a=\cos\theta, b=\sin\theta$ とおける.

まず,$A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ のとき,

$$A^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となるので,$A=E$ でなくてはならないが, これは矛盾する. よって,$A=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ の場合を考えればよく, この場合,

$$A^3=\begin{pmatrix} \cos 3\theta & \sin 3\theta \\ -\sin 3\theta & \cos 3\theta \end{pmatrix}$$

であるから,$3\theta=2n\pi$(n は整数) を得る. 以上より,

$$A=\begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdots (\text{答})$$

を得る.