

2005 年度

M 3

数 学

2 月 25 日(金)

理学部(数学科)

12:30 ~ 14:30

【前期日程】

注 意 事 項

試験開始前

- 1 監督者の指示があるまで、問題冊子、解答用紙に手を触れないでください。
- 2 監督者の指示に従って、全部の解答用紙(4枚)に受験番号を記入してください。

試験開始後

- 3 この問題冊子は、4ページあります。はじめに、問題冊子、解答用紙を確かめ、枚数の不足や、印刷の不鮮明なもの、ページの落丁・乱丁があった場合は、手をあげて監督者に申し出てください。
- 4 解答はすべて別紙解答用紙に記入してください。
- 5 解答スペースが不足するときは、解答用紙の裏面も使用することが出来ます。ただし、その場合は、表面に「裏へつづく」と明記してください。
- 6 問題は、声を出して読むはいけません。
- 7 各問ごとの配点は、比率(%)で表示してあります。

試験終了後

- 8 問題冊子は、必ず持ち帰ってください。

1 辺 AB を下底とする台形 ABCD が $AD = DC = CB = 1$, $AB > 1$ を満たしている。対角線 AC と BD の交点を P, $\overrightarrow{AD} = \vec{x}$, $\overrightarrow{DC} = \vec{y}$ とし, \vec{x} と \vec{y} の内積を $\vec{x} \cdot \vec{y}$ と表す。次の問いに答えよ。

- (1) AB を $\vec{x} \cdot \vec{y}$ を用いて表せ。
- (2) \overrightarrow{AP} を \vec{x} , \vec{y} , $\vec{x} \cdot \vec{y}$ を用いて表せ。
- (3) $\vec{x} \cdot \vec{y} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ のとき $\triangle ABP$ の面積を求めよ。

(配点 25%)

2 関数 $f(x)$ がすべての実数 s, t に対して

$$f(s+t) = f(s) + f(t)$$

を満たしているとき、次の問いに答えよ。

- (1) $f(0)$ を求めよ。
- (2) $f(x)$ が $x=0$ で微分可能であれば、 $f(x)$ はすべての実数 a に対して $x=a$ で微分可能であることを証明せよ。
- (3) $f(x)$ が $x=0$ で微分可能で $f'(0) = 0$ のとき、 $f(x)$ を求めよ。

(配点 25%)

3 a, b を実数とする。点 $(1, 1)$ を通り、直線 $x = 2$ に関して対称である放物線

$$y = (-\cos \theta)x^2 + ax + b \quad \left(0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}\right)$$

について、次の問いに答えよ。

- (1) a, b を θ を用いて表せ。
- (2) この放物線と x 軸により囲まれた図形の面積 $S(\theta)$ を θ を用いて表せ。
- (3) $S(\theta)$ の最小値とそのときの θ の値を求めよ。

(配点 25%)

4 a, b, c, d を実数とし, 2次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

に対して $BA = E$ が成立しているとする。次の問いに答えよ。

- (1) 実数 x, y に対して, $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とおく。このとき, $X^2 + Y^2 = x^2 + y^2$ が成り立つことを示せ。
- (2) $ad - bc$ は 1 または -1 であることを示せ。
- (3) A は $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ または $\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ と表せることを示せ。
- (4) $A^3 = E$ となる A を求めよ。

(配点 25%)