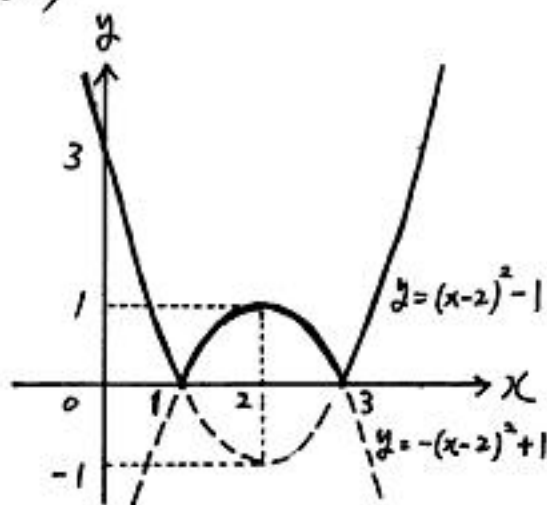


$$1 \quad (1) f(x) = |x^2 - 4x + 3| = |(x-1)(x-3)| \text{ より}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & (x < 1, 3 < x \text{ のとき}) \\ -x^2 + 4x - 3 & (1 \leq x \leq 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (x-2)^2 - 1 & (x < 1, 3 < x \text{ のとき}) \\ -(x-2)^2 + 1 & (1 \leq x \leq 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

したがって、 $y = f(x)$ のグラフは右図の
実線のようになる。



(2) (i) $0 \leq x \leq 1$ のとき

$$F(x) = \int_0^x (t^2 - 4t + 3) dt = \left[\frac{1}{3} t^3 - 2t^2 + 3t \right]_0^x = \frac{1}{3} x^3 - 2x^2 + 3x$$

(ii) $1 < x \leq 3$ のとき、(i)の結果を利用して

$$F(x) = \frac{1}{3} \cdot 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + \int_1^x (-t^2 + 4t - 3) dt = \frac{4}{3} + \left[-\frac{t^3}{3} + 2t^2 - 3t \right]_1^x = -\frac{1}{3} x^3 + 2x^2 - 3x + \frac{8}{3}$$

(iii) $3 < x$ のとき、(ii)の結果を利用して

$$F(x) = -\frac{1}{3} \cdot 3^3 + 2 \cdot 3^2 - 3 \cdot 3 + \frac{8}{3} + \int_3^x (t^2 - 4t + 3) dt = \frac{8}{3} + \left[\frac{t^3}{3} - 2t^2 + 3t \right]_3^x = \frac{1}{3} x^3 - 2x^2 + 3x + \frac{8}{3}$$

$$\text{以上より、} F(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} x^3 - 2x^2 + 3x & (0 \leq x \leq 1 \text{ のとき}) \\ -\frac{1}{3} x^3 + 2x^2 - 3x + \frac{8}{3} & (1 < x \leq 3 \text{ のとき}) \dots\dots (\text{答}) \\ \frac{1}{3} x^3 - 2x^2 + 3x + \frac{8}{3} & (3 < x \text{ のとき}) \end{cases}$$

(3) $f(x) \geq 0$ であり、 $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ は、 $y = f(x)$ と、 x 軸と、 y 軸と、点 $(x, 0)$ を通る y 軸に垂直な直線で囲まれた領域の面積を表すので、 $x (\geq 0)$ に関して単調増加である。
ゆえに、 $F(x) = 2$ を満たす x の値は 1 つしか存在しない。

$$F(1) = \frac{1}{3} \cdot 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 = \frac{4}{3} < 2, \quad F(3) = -\frac{1}{3} \cdot 3^3 + 2 \cdot 3^2 - 3 \cdot 3 + \frac{8}{3} = \frac{8}{3} > 2$$

より、求めるべき x の値は $1 < x < 3$ の範囲にある。

$$-\frac{1}{3} x^3 + 2x^2 - 3x + \frac{8}{3} = 2 \Leftrightarrow -\frac{1}{3} (x-2) \{x - (2+\sqrt{3})\} \{x - (2-\sqrt{3})\} = 0$$

$2+\sqrt{3} = 3.7\dots > 3$, $2-\sqrt{3} = 0.26\dots < 1$ であり、 $1 < x < 3$ より

$$\underline{x = 2} \dots\dots (\text{答})$$

2 2円 C_1, C_2 の中心をそれぞれ O_1, O_2 とおく.

$$(1) \text{三平方の定理より} \begin{cases} PO_1^2 = O_1P^2 - O_1O_1^2 = (x-(-2))^2 + y^2 - 4 = x^2 + y^2 + 4x \\ PO_2^2 = O_2P^2 - O_2O_2^2 = (x-2)^2 + y^2 - 1 = x^2 + y^2 - 4x + 3 \end{cases}$$

$$PO_2^2 - PO_1^2 = 3 \Leftrightarrow (x^2 + y^2 - 4x + 3) - (x^2 + y^2 + 4x) = 3 \Leftrightarrow x = 0.$$

点 P は C_1 上にないことから、求めるべき点 P の軌跡は

直線 $x = 0$ ただし点 $(0, 0)$ を除く (答)

$$(2) PO_1^2 = O_1P^2 - O_1O_1^2 = x^2 + y^2 + 4x, PO_2^2 = O_2P^2 - O_2O_2^2 = (x-a)^2 + y^2 - 1$$

$$PO_2^2 - PO_1^2 = 3 \Leftrightarrow (x-a)^2 - 1 - (x^2 + 4x) = 3 \Leftrightarrow (a+2) \cdot x = (a+2) \left(\frac{1}{2}a - 1 \right)$$

$$a > -2 \text{ より } x = \frac{1}{2}a - 1 \text{ ①}$$

①と C_1 が共有点を持つのは $-4 \leq \frac{1}{2}a - 1 \leq 0$ ($a > -2$) より $-2 < a \leq 2$ のとき、

このときの共有点の y 座標は

$$\left\{ \left(\frac{1}{2}a - 1 \right) + 2 \right\}^2 + y^2 = 4 \text{ より } y = \pm \sqrt{-\frac{1}{4}a^2 - a + 3}$$

①と C_2 が共有点を持つのは $\left| a - \left(\frac{1}{2}a - 1 \right) \right| \leq 1$ ($a > -2$) より $-2 < a \leq 0$ のとき、

このときの共有点の y 座標は

$$\left\{ \left(\frac{1}{2}a - 1 \right) - a \right\}^2 + y^2 = 1 \text{ より } y = \pm \sqrt{-\frac{1}{4}a^2 - a}$$

$-2 < a \leq 0$ のとき ①は C_1 と C_2 の両方と共有点を持つが、

$$\sqrt{-\frac{1}{4}a^2 - a + 3} > \sqrt{-\frac{1}{4}a^2 - a} \text{ より、①と } C_1 \text{ の共有点の } y \text{ 座標の絶対値の}$$

方が、①と C_2 の共有点の y 座標の絶対値よりも大きい。 $0 < a \leq 2$ のときは

①は C_1 とのみ共有点 $\left(\frac{1}{2}a - 1, \pm \sqrt{-\frac{1}{4}a^2 - a + 3} \right)$ を持つ。接線を引けることから

点 P は円 C_1, C_2 の内部にはなく、かつ問題文より C_1, C_2 上にもない。

以上より、求めるべき点 P の軌跡は

$$\text{直線 } x = \frac{1}{2}a - 1$$

ただし、 $-2 < a < 2$ のときは $-\sqrt{-\frac{1}{4}a^2 - a + 3} \leq y \leq \sqrt{-\frac{1}{4}a^2 - a + 3}$ の領域を除き、

$a = 2$ のときは、点 $(0, 0)$ を除く。

(答)

3 (1) $y = x^2 + ax + b$ が 2 点 $A(\cos\theta, \sin\theta)$, $B(-\cos\theta, -\sin\theta)$ を通ることから

$$\begin{cases} \sin\theta = \cos^2\theta + a\cos\theta + b \\ -\sin\theta = \cos^2\theta - a\cos\theta + b \end{cases} \quad \therefore \underline{a = \tan\theta, b = -\cos^2\theta} \dots\dots(\text{答})$$

$$y = x^2 + \tan\theta \cdot x - \cos^2\theta = \left(x + \frac{\tan\theta}{2}\right)^2 - \frac{\tan^2\theta}{4} - \cos^2\theta \text{ より 頂点の } y \text{ 座標は}$$

$$\underline{-\frac{1}{4}\tan^2\theta - \cos^2\theta} \dots\dots(\text{答})$$

$$(2) \vec{OP} \cdot \vec{OA} = (x, y) \cdot (\cos\theta, \sin\theta) = (x, x^2 + \tan\theta \cdot x - \cos^2\theta) \cdot (\cos\theta, \sin\theta)$$

$$= \cos\theta \cdot x + \sin\theta(x^2 + \tan\theta \cdot x - \cos^2\theta)$$

$$= \sin\theta \left(x + \frac{1}{\sin 2\theta}\right)^2 - \frac{1}{4\sin\theta \cos^2\theta} - \cos^2\theta \sin\theta$$

ここで右辺を $f(x)$ とおく。 $0^\circ < 2\theta < 180^\circ$ より $0 < \sin 2\theta < 1$ 。

$y = f(x)$ のグラフは、頂点の y 座標 $\left(-\frac{1}{\sin 2\theta}\right)$ が負で、下に凸 ($\because \sin\theta > 0$) の放物線である。 $x > \cos\theta$ ($0^\circ < \theta < 90^\circ$ より $\cos 2\theta > 0$ である) のとき

$$f(x) > f(\cos\theta) = \cos^2\theta + \sin\theta(\cos^2\theta + \tan\theta \cdot \cos\theta - \cos^2\theta) = 1$$

したがって、 $\vec{OP}$ と $\vec{OA}$ の内積は 1 より大きい。(証明終)

(3) $1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$ より、頂点の y 座標は

$$-\frac{1}{4}\tan^2\theta - \cos^2\theta = -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\cos^2\theta} - 1\right) - \cos^2\theta = -\left(\frac{1}{4}\frac{1}{\cos^2\theta} + \cos^2\theta - \frac{1}{4}\right) \dots\dots ①$$

ここで、 $0^\circ < \theta < 90^\circ$ より $\cos^2\theta > 0$ なのて「相加・相乗平均の関係より」

$$\frac{1}{4}\frac{1}{\cos^2\theta} + \cos^2\theta \geq 2\sqrt{\frac{1}{4}\frac{1}{\cos^2\theta} \cdot \cos^2\theta} = 1 \dots\dots ②$$

等号成立は $\frac{1}{4}\frac{1}{\cos^2\theta} = \cos^2\theta \Leftrightarrow \cos^4\theta = \frac{1}{4}$ のとき

$\cos\theta > 0$ より $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $0^\circ < \theta < 90^\circ$ より $\theta = 45^\circ$ のとき。

①, ②より

$$(\text{頂点の } y \text{ 座標}) \leq -\left(1 - \frac{1}{4}\right) = -\frac{3}{4}$$

したがって、頂点の y 座標の最大値は $-\frac{3}{4}$ で、そのとき $\theta = 45^\circ$ (答)

4 (1) 3直線 $x = a_n, x = a_{n+1}, y = 2x$ および曲線 $y = 3x^2$ で囲まれた部分の面積を S_n とおくと、 $x \geq 1$ のとき $3x^2 > 2x$ なるので

$$S_n = \int_{a_n}^{a_{n+1}} (3x^2 - 2x) dx = \left[x^3 - x^2 \right]_{a_n}^{a_{n+1}} = (a_{n+1}^3 - a_{n+1}^2) - (a_n^3 - a_n^2) \\ = h_{n+1} - h_n.$$

一方、問題文より $S_n = 3n^2 + n$ なるので、 $h_{n+1} = h_n + 3n^2 + n$ …… (答)

(2) 数列 $\{h_n\}$ の階差数列が $3n^2 + n$ なるので

(i) $n \geq 2$ のとき

$$h_n = h_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (3k^2 + k)$$

$$= 1^3 - 1^2 + 3 \cdot \frac{1}{6} (n-1)n \{2(n-1) + 1\} + \frac{1}{2} (n-1)n \\ = n^3 - n^2$$

(i) $n=1$ のとき $h_1 = a_1^3 - a_1^2 = 1^3 - 1^2 = 0$ であり、上式は $n=1$ でも成立。

したがって、 $n=1, 2, 3, \dots$ に対し

$$h_n = a_n^3 - a_n^2 = n^3 - n^2.$$

問題文より、 a_1 が与えられているので a_2 がある1つの値に定まり、

a_k (k : 自然数) の値が1つ定まると $S_k = 3k^2 + k$ を満たすように a_{k+1} の値も一つに定まる。したがって、数学的帰納法により a_n の値は必ず一つに定まる。 $a_n = n$ とすると、 $a_n^3 - a_n^2 = n^3 - n^2$ を満たす

したがって、求めるべき一般項 a_n は

$$\underline{a_n = n \dots\dots (答)}$$