

1 (1) n 回中、表が k 回で裏が $(n-k)$ 回なので、求めるべき確率は

$${}_nC_k \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \frac{n!}{2^n (n-k)! k!} \dots\dots (\text{答})$$

(2) $X_i = m$ (i, m : 整数) となる確率を $A(X_i = m)$ で表すことにする。

$$A(X_5 = 3) = {}_5C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^{5-3} = \frac{5}{2^4}$$

$$A(X_7 = 4) = {}_7C_4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^{7-4} = \frac{35}{2^7}$$

$X_5 = 3$ が $X_7 = 4$ となる確率は

$$A(X_5 = 3, X_7 = 4) = {}_5C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^{5-3} \times {}_2C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^{2-1} = \frac{5}{2^5}$$

したがって、 $X_5 \neq 3$ が $X_7 \neq 4$ となる確率は

$$\begin{aligned} A(X_5 \neq 3, X_7 \neq 4) &= 1 - \{A(X_5 = 3) + A(X_7 = 4) - A(X_5 = 3, X_7 = 4)\} \\ &= 1 - \left(\frac{5}{2^4} + \frac{35}{2^7} - \frac{5}{2^5}\right) = \frac{73}{128} \dots\dots (\text{答}) \end{aligned}$$

(3) (X_5, Y_5) の組み合わせは、 $X_5 + Y_5 = 5$ より

$(0, 5), (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1), (5, 0)$ の 6通りで $X_5 + Y_5$ の値はそれぞれ 0, 4, 6, 6, 4, 0 である。

$$X_5 + Y_5 = 0 \text{ となる確率は } 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{2^4}$$

$$X_5 + Y_5 = 4 \text{ となる確率は } 2 \times {}_5C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^{5-4} = \frac{5}{2^4}$$

$$X_5 + Y_5 = 6 \text{ となる確率は } 2 \times {}_5C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{5-2} = \frac{5}{2^3}$$

したがって、期待値は

$$0 \times \frac{1}{2^4} + 4 \times \frac{5}{2^4} + 6 \times \frac{5}{2^3} = \underline{5} \dots\dots (\text{答})$$

2 (1) 3直線 $x = a_n, x = a_{n+1}, y = 2x$ および曲線 $y = 3x^2$ で囲まれた部分の面積を S_n とおくと、 $x \geq 1$ のとき $3x^2 > 2x$ なので

$$S_n = \int_{a_n}^{a_{n+1}} (3x^2 - 2x) dx = \left[x^3 - x^2 \right]_{a_n}^{a_{n+1}} = (a_{n+1}^3 - a_{n+1}^2) - (a_n^3 - a_n^2) \\ = h_{n+1} - h_n.$$

一方、問題文より $S_n = 3n^2 + n$ なので、 $h_{n+1} = h_n + 3n^2 + n$ …… (答)

(2) 数列 $\{h_n\}$ の階差数列が $3n^2 + n$ なので

(i) $n \geq 2$ のとき

$$h_n = h_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (3k^2 + k)$$

$$= 1^3 - 1^2 + 3 \cdot \frac{1}{6} (n-1)n \{2(n-1) + 1\} + \frac{1}{2} (n-1)n \\ = n^3 - n^2$$

(ii) $n=1$ のとき $h_1 = a_1^3 - a_1^2 = 1^3 - 1^2 = 0$ であり、上式は $n=1$ でも成立。

したがって、 $n=1, 2, 3, \dots$ に対し

$$h_n = a_n^3 - a_n^2 = n^3 - n^2.$$

問題文より、 a_1 が与えられているので a_2 がある1つの値に定まり、 a_k (k : 自然数) の値が1つ定まると $S_k = 3k^2 + k$ を満たすように a_{k+1} の値も1つに定まる。したがって、数学的帰納法により a_n の値は必ず1つに定まる。 $a_n = n$ とすると、 $a_n^3 - a_n^2 = n^3 - n^2$ を満たす

したがって、求めるべき一般項 a_n は

$$\underline{a_n = n \dots\dots (答)}$$

$$\boxed{3} \quad (1) \quad \vec{v}_{\frac{\pi}{4}} = \left(\frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{4} \right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{8} \pi, \frac{\sqrt{2}}{8} \pi \right), \quad \vec{v}_\theta = (\theta \cos \theta, \theta \sin \theta)$$

$$\text{よ} \rangle \quad \vec{v}_{\frac{\pi}{4}} \cdot \vec{v}_\theta = \frac{\pi}{8} \theta \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}\pi}{8} \theta \cos \theta + \frac{\sqrt{2}\pi}{8} \theta \sin \theta = \frac{\pi}{8} \theta$$

$\theta = 0$ のとき等号は成立する。 $\theta \neq 0$ のとき 上式より

$$\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sqrt{2} \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\pi}{4} < \theta + \frac{\pi}{4} \leq \frac{5}{4}\pi \text{ より } \theta + \frac{\pi}{4} = \frac{5}{6}\pi \quad \therefore \theta = \frac{7}{12}\pi.$$

以上より、求めるべき θ は、 $\theta = 0, \frac{7}{12}\pi, \dots$ (答)

$$(2) \quad \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\theta \sin 2\theta + \theta^2 \cos 2\theta) d\theta = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \theta \sin 2\theta d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \theta^2 \cos 2\theta d\theta$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \theta \sin 2\theta d\theta + \left[\theta^2 \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \theta \sin 2\theta d\theta$$

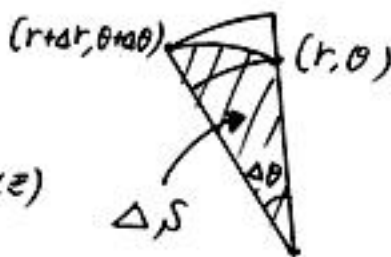
$$= \frac{1}{2} \left\{ \pi^2 \sin 2\pi - \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 \sin \pi \right\} = 0 \quad \dots \dots \text{(答)}$$

(3) $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ において極座標で考える。

右図より、 $\frac{1}{2} r^2 \Delta \theta < \Delta S < \frac{1}{2} (r + \Delta r)^2 \Delta \theta$

$$\frac{1}{2} r^2 < \frac{\Delta S}{\Delta \theta} < \frac{1}{2} (r + \Delta r)^2 \rightarrow \frac{1}{2} r^2 (\Delta r \rightarrow 0 \text{ のとき})$$

$$\text{よ} \rangle, \quad \frac{dS}{d\theta} = \frac{1}{2} r^2$$



$$\text{また、} r^2 = x^2 + y^2 = \theta^2 \cos^2 \theta + \theta^2 \sin^2 \theta = \theta^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = \theta^2 \text{ となる。}$$

$$S = \int_{\theta=\frac{\pi}{2}}^{\theta=\pi} dS = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{2} \theta^2 d\theta = \left[\frac{1}{6} \theta^3 \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{7}{48} \pi^3 \quad \dots \dots \text{(答)}$$

[4] (1) $f(x) = \log x - \sqrt[3]{x} + k \ (x > 0)$ より

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{x} \left(1 - \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3}} \right)$$

$$f'(x) = 0 \text{ とおくと } 1 - \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3}} = 0 \Leftrightarrow x = 3^3 = 27$$

$$f(27) = \log 27 - \sqrt[3]{27} + k = 3 \log 3 - 3 + k \text{ より } f(x) \text{ の増減表は下のようになる.}$$

x	(0)	$\dots$	27	$\dots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	$3(\log 3 - 1) + k$	$\searrow$

$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = -\infty$ より、 $f(x) = 0$ が実数解を持つ条件は

$$3(\log 3 - 1) + k \geq 0 \quad \therefore \underline{k \geq -3(\log 3 - 1)} \dots \dots (\text{答})$$

(2) $k = -3(\log 3 - 1)$ とすると、(1)より $f(x) \leq 0$.

$$f(x) = \log x - \sqrt[3]{x} - 3(\log 3 - 1) \leq 0$$

の両辺に $\frac{1}{\sqrt{x}} \ (x > 0)$ をかけて整理すると

$$0 < \frac{\log x}{\sqrt{x}} < \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}} + \frac{3(\log 3 - 1)}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{6}}} + \frac{3(\log 3 - 1)}{\sqrt{x}} \rightarrow 0 \ (x \rightarrow \infty \text{ とき})$$

したがって、はさみうちの原理より $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x}{\sqrt{x}} = 0$ が成立する。(証明終)

(3) $\log x = t$ とおくと、 $\frac{1}{x} dx = dt$, $\begin{array}{|c|c|} \hline x & 1 \rightarrow a \\ \hline t & 0 \rightarrow \log a \\ \hline \end{array}$ より

$$I(a) = \int_1^a \frac{\log x}{x\sqrt{x}} dx = \int_0^{\log a} t e^{-\frac{1}{2}t} dt$$

$$= \left[t(-2) e^{-\frac{1}{2}t} \right]_0^{\log a} + 2 \int_0^{\log a} e^{-\frac{1}{2}t} dt$$

$$= -2 \log a e^{-\frac{1}{2} \log a} + 2 \left[-2 e^{-\frac{1}{2}t} \right]_0^{\log a}$$

$$= -2 \frac{\log a}{\sqrt{a}} - 4 \frac{1}{\sqrt{a}} + 4 \rightarrow 4 \ (a \rightarrow \infty \text{ とき}) \ (\because (2) \text{ より})$$

したがって $\lim_{a \rightarrow \infty} I(a) = \underline{4} \dots \dots (\text{答})$