

1 (1) n 回中、表が k 回で裏が $(n-k)$ 回なので、求めるべき確率は

$${}_n C_k \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \frac{n!}{2^n (n-k)! k!} \dots\dots (\text{答})$$

(2) $X_i = m$ (i, m : 整数) となる確率を $A(X_i = m)$ で表すことにする。

$$A(X_5 = 3) = {}_5 C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^{5-3} = \frac{5}{2^4}$$

$$A(X_7 = 4) = {}_7 C_4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^{7-4} = \frac{35}{2^7}$$

$X_5 = 3$ か $X_7 = 4$ となる確率は

$$A(X_5 = 3, X_7 = 4) = {}_5 C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^{5-3} \times {}_2 C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^{2-1} = \frac{5}{2^5}$$

したがって、 $X_5 \neq 3$ か $X_7 \neq 4$ となる確率は

$$\begin{aligned} A(X_5 \neq 3, X_7 \neq 4) &= 1 - \{A(X_5 = 3) + A(X_7 = 4) - A(X_5 = 3, X_7 = 4)\} \\ &= 1 - \left(\frac{5}{2^4} + \frac{35}{2^7} - \frac{5}{2^5}\right) = \frac{73}{128} \dots\dots (\text{答}) \end{aligned}$$

(3) (X_5, Y_5) の組み合わせは、 $X_5 + Y_5 = 5$ より

$(0, 5), (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1), (5, 0)$ の 6通りで $X_5 + Y_5$ の値は

それぞれ $0, 4, 6, 6, 4, 0$ である。

$$X_5 + Y_5 = 0 \text{ となる確率は } 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{2^4}$$

$$X_5 + Y_5 = 4 \text{ となる確率は } 2 \times {}_5 C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^{5-4} = \frac{5}{2^4}$$

$$X_5 + Y_5 = 6 \text{ となる確率は } 2 \times {}_5 C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{5-2} = \frac{5}{2^3}$$

したがって、期待値は

$$0 \times \frac{1}{2^4} + 4 \times \frac{5}{2^4} + 6 \times \frac{5}{2^3} = \underline{5} \dots\dots (\text{答})$$

$$\begin{aligned} [2] (1) \frac{|\vec{a} + x\vec{b}| - |\vec{a}|}{x} &= \frac{|\vec{a} + x\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2}{x(|\vec{a} + x\vec{b}| + |\vec{a}|)} \quad \left(\because |\vec{a}| \neq 0 \text{ より} \right. \\ &\quad \left. \because |\vec{a} + x\vec{b}| + |\vec{a}| \neq 0 \text{ なの} \right) \\ &= \frac{x(2\vec{a} \cdot \vec{b} + x|\vec{b}|^2)}{x(|\vec{a} + x\vec{b}| + |\vec{a}|)} = \frac{2\vec{a} \cdot \vec{b} + x|\vec{b}|^2}{|\vec{a} + x\vec{b}| + |\vec{a}|} \rightarrow \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|} \quad \begin{matrix} (x \rightarrow 0 \text{ のとき}) \\ (\text{証明終}) \end{matrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) |\vec{a}| > 0 \text{ より}, |\vec{a}| \leq |\vec{a} + x\vec{b}| &\Leftrightarrow |\vec{a}|^2 \leq |\vec{a} + x\vec{b}|^2 \\ &\Leftrightarrow |\vec{a}|^2 \leq |\vec{a}|^2 + 2x\vec{a} \cdot \vec{b} + x^2|\vec{b}|^2 \\ &\Leftrightarrow 2x\vec{a} \cdot \vec{b} + x^2|\vec{b}|^2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$x > 0 \text{ より } 2\vec{a} \cdot \vec{b} + x|\vec{b}|^2 \geq 0 \Leftrightarrow x|\vec{b}|^2 \geq -2\vec{a} \cdot \vec{b}$$

$x|\vec{b}|^2$ は $|\vec{b}|=0$ のとき値 0 をとり、 $|\vec{b}| \neq 0$ のとき $x > 0$ より任意の正の値をとり得る。
したがって $-2\vec{a} \cdot \vec{b} \leq 0$ つまり $\vec{a} \cdot \vec{b} \geq 0$ であることが必要である。

逆に $\vec{a} \cdot \vec{b} \geq 0$ とすると、任意の $x(>0)$ に対して $x|\vec{b}|^2 \geq -2\vec{a} \cdot \vec{b}$ が成立
することから、上の論理を逆にたどっていくことにより、すべての $x(>0)$ に対して
 $|\vec{a}| \leq |\vec{a} + x\vec{b}|$ が成立するといえる。以上のことから $|\vec{a}| \leq |\vec{a} + x\vec{b}|$ が成立
するための必要十分条件は $\vec{a} \cdot \vec{b} \geq 0$ である。(証明終)

(3) $x=0$ のときは任意の $\vec{a}, \vec{b}$ の値に対し、 $x\vec{b} = \vec{0}$ より $|\vec{a}| \leq |\vec{a} + x\vec{b}|$ が成立。
 $x < 0$ のとき、(2) と同様の計算により $|\vec{a}| > 0$ から、

$$|\vec{a}| \leq |\vec{a} + x\vec{b}| \Leftrightarrow 2x\vec{a} \cdot \vec{b} + x^2|\vec{b}|^2 \geq 0 \Leftrightarrow x|\vec{b}|^2 \leq -2\vec{a} \cdot \vec{b} \quad \cdots \textcircled{1}$$

$x|\vec{b}|^2$ は $|\vec{b}|=0$ のとき値 0 をとり、 $x < 0$ より任意の負の値をとりうる。したがって、
任意の負の x に対して上の不等式①が成立するためには、

$$-2\vec{a} \cdot \vec{b} \geq 0 \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} \leq 0 \text{ であることが必要である。実数 } x \text{ に対し、}$$

$\vec{a} \cdot \vec{b} \leq 0$ かつ $\vec{a} \cdot \vec{b} \geq 0$ ($\because$ (2) より) より $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ が必要条件であり、
逆に $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ とすると

$$2x\vec{a} \cdot \vec{b} + x^2|\vec{b}|^2 \geq 0 \text{ より常に } |\vec{a}| \leq |\vec{a} + x\vec{b}| \text{ が成立する。}$$

したがって、求めるべき必要十分条件は $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ ……(答)

3 (1) $\vec{v}_{\frac{\pi}{4}} = \left(\frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{8}\pi, \frac{\sqrt{2}}{8}\pi\right), \vec{v}_0 = (\theta \cos \theta, \theta \sin \theta)$

よ) $\vec{v}_{\frac{\pi}{4}} \cdot \vec{v}_0 = \frac{\pi}{8} \theta \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}\pi}{8} \theta \cos \theta + \frac{\sqrt{2}\pi}{8} \theta \sin \theta = \frac{\pi}{8} \theta$

$\theta = 0$ のとき等号は成立する。 $\theta \neq 0$ のとき 上式より

$\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sqrt{2} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$

$\frac{\pi}{4} < \theta + \frac{\pi}{4} \leq \frac{5}{4}\pi$ より $\theta + \frac{\pi}{4} = \frac{5}{6}\pi \therefore \theta = \frac{7}{12}\pi$

以上より、求めるべき θ は、 $\theta = 0, \frac{7}{12}\pi, \dots$ (答)

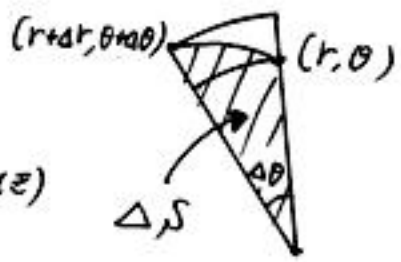
(2) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\theta \sin 2\theta + \theta^2 \cos 2\theta) d\theta = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \theta \sin 2\theta d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \theta^2 \cos 2\theta d\theta$

$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \theta \sin 2\theta d\theta + \left[\theta^2 \frac{1}{2} \sin 2\theta\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \theta \sin 2\theta d\theta$

$= \frac{1}{2} \left\{ \pi^2 \sin 2\pi - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \sin \pi \right\} = 0 \dots$ (答)

(3) $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ について極座標で考える。

右図より、 $\frac{1}{2} r^2 \Delta \theta < \Delta S < \frac{1}{2} (r + \Delta r)^2 \Delta \theta$



$\frac{1}{2} r^2 < \frac{\Delta S}{\Delta \theta} < \frac{1}{2} (r + \Delta r)^2 \rightarrow \frac{1}{2} r^2 (\Delta r \rightarrow 0 \text{ のとき})$

よ) $\frac{dS}{d\theta} = \frac{1}{2} r^2$

また、 $r^2 = x^2 + y^2 = \theta^2 \cos^2 \theta + \theta^2 \sin^2 \theta = \theta^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = \theta^2$ となる。

$S = \int_{\theta=\frac{\pi}{2}}^{\theta=\pi} dS = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{2} \theta^2 d\theta = \left[\frac{1}{6} \theta^3\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{7}{48} \pi^3 \dots$ (答)

4 (1) $f(x) = \log x - \sqrt[3]{x} + k \ (x > 0) \text{ より}$

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{x} \left(1 - \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3}} \right)$$

$$f'(x) = 0 \text{ とおくと } 1 - \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3}} = 0 \Leftrightarrow x = 3^3 = 27$$

$$f(27) = \log 27 - \sqrt[3]{3^3} + k = 3 \log 3 - 3 + k \text{ より } f(x) \text{ の増減表は下のようになる.}$$

x	(0)	$\dots$	27	$\dots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	$3(\log 3 - 1) + k$	$\searrow$

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = -\infty \text{ より, } f(x) = 0 \text{ が実数解を持つ条件は}$$

$$3(\log 3 - 1) + k \geq 0 \quad \therefore \underline{k \geq -3(\log 3 - 1)} \dots\dots (\text{答})$$

$$(2) k = -3(\log 3 - 1) \text{ とすると, (1) より } f(x) \leq 0.$$

$$f(x) = \log x - \sqrt[3]{x} - 3(\log 3 - 1) \leq 0$$

の両辺に $\frac{1}{\sqrt{x}} \ (> 0)$ をかけて整理すると

$$0 < \frac{\log x}{\sqrt{x}} < \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}} + \frac{3(\log 3 - 1)}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{6}}} + \frac{3(\log 3 - 1)}{\sqrt{x}} \rightarrow 0 \ (x \rightarrow \infty \text{ とき})$$

$$\text{したがって, はさみうちの原理より } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x}{\sqrt{x}} = 0 \text{ が成立する. (証明終)}$$

$$(3) \log x = t \text{ とおくと, } \frac{1}{x} dx = dt, \quad \begin{array}{|c|c|} \hline x & 1 \rightarrow a \\ \hline t & 0 \rightarrow \log a \\ \hline \end{array} \text{ より}$$

$$I(a) = \int_1^a \frac{\log x}{x\sqrt{x}} dx = \int_0^{\log a} t e^{-\frac{1}{2}t} dt$$

$$= \left[t(-2) e^{-\frac{1}{2}t} \right]_0^{\log a} + 2 \int_0^{\log a} e^{-\frac{1}{2}t} dt$$

$$= -2 \log a e^{-\frac{1}{2} \log a} + 2 \left[-2 e^{-\frac{1}{2}t} \right]_0^{\log a}$$

$$= -2 \frac{\log a}{\sqrt{a}} - 4 \frac{1}{\sqrt{a}} + 4 \rightarrow 4 \ (a \rightarrow \infty \text{ とき}) \ (\because (2) \text{ より})$$

$$\text{したがって } \lim_{a \rightarrow \infty} I(a) = \underline{4} \dots\dots (\text{答})$$