

2006 年度

M 2

数 学

2 月 25 日 (土)

【前 期 日 程】

情 報 学 部 (情報科学科)

理学部 (物理学科, 化学科)

工 学 部

13 : 00 ~ 15 : 00

注 意 事 項

試験開始前

- 1 監督者の指示があるまで、問題冊子、解答用紙に手を触れないでください。
- 2 監督者の指示に従って、全部の解答用紙 (4 枚) に受験番号を記入してください。

試験開始後

- 3 この問題冊子は、4 ページあります。はじめに、問題冊子、解答用紙を確かめ、枚数の不足や、印刷の不鮮明なもの、ページの落丁・乱丁があった場合は、手をあげて監督者に申し出てください。
- 4 解答は、すべて別紙解答用紙に記入してください。
- 5 解答スペースが不足するときは、解答用紙の裏面も使用することが出来ます。ただし、その場合は、表面に「裏へつづく」と明記してください。
- 6 問題は、声を出して読むはいけません。
- 7 各問ごとの配点は、比率 (%) で表示してあります。

試験終了後

- 8 問題冊子は、必ず持ち帰ってください。

- 1** 表と裏が同じ確率 $\frac{1}{2}$ で出るコインがある。座標平面上の原点 O から出発する点 P が次の規則に従って動くとする。

コインを投げたとき $\begin{cases} \text{表が出れば } x \text{ 軸の正の方向に } 1 \text{ 進む} \\ \text{裏が出れば } y \text{ 軸の正の方向に } 1 \text{ 進む} \end{cases}$

コインを n 回続けて投げたとする。途中の j 回目 ($1 \leq j \leq n$) のときの点 P を P_j とし、その座標を (X_j, Y_j) と表す。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 点 P_n の座標が $(k, n-k)$ である確率を求めよ。ただし $k = 0, 1, 2, \dots, n$ とする。
- (2) $n = 7$ のとき、点 P_5 の x 座標 X_5 が $X_5 \neq 3$ で、 P_7 の x 座標 X_7 が $X_7 \neq 4$ となる確率を求めよ。
- (3) $n = 5$ のとき、積 $X_5 Y_5$ の期待値を求めよ。

(配点 25%)

2 $a_1 = 1$ で、 $a_n < a_{n+1}$ ($n = 1, 2, \dots$) を満たす数列 $\{a_n\}$ がある。3 直線 $x = a_n$, $x = a_{n+1}$, $y = 2x$ および曲線 $y = 3x^2$ で囲まれた部分の面積が $3n^2 + n$ であるとする。次の問いに答えよ。

(1) $b_n = a_n^3 - a_n^2$ とおくとき、 b_{n+1} を b_n , n を用いて表せ。

(2) 一般項 a_n を n を用いて表せ。

(配点 25%)

3 $0 \leq \alpha < \beta < 2\pi$ を満たす α, β に対して、座標平面上の曲線 $C_{\alpha, \beta}$ を

$$x = \theta \cos \theta, y = \theta \sin \theta \quad (\alpha \leq \theta \leq \beta)$$

で定義する。次の問いに答えよ。

- (1) 原点 O を始点として $C_{0, \pi}$ 上の点 $(\theta \cos \theta, \theta \sin \theta)$ を終点とするベクトルを $\vec{v}_\theta$ と表す。 $\vec{v}_{\frac{\pi}{4}} \cdot \vec{v}_\theta = \frac{\pi}{8}\theta$ が成り立つとき、 θ を求めよ。ただし、 $\vec{v}_{\frac{\pi}{4}} \cdot \vec{v}_\theta$ は内積を表す。
- (2) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\theta \sin 2\theta + \theta^2 \cos 2\theta) d\theta$ を求めよ。
- (3) $C_{\frac{\pi}{2}, \pi}$ と 2 直線 x 軸, y 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(配点 25%)

4 k を定数とするとき、次の問いに答えよ。

(1) 関数 $f(x)$ を $f(x) = \log x - \sqrt[3]{x} + k$ ($x > 0$) としたとき、 $f(x) = 0$ が実数解をもつ k の範囲を求めよ。

(2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{\sqrt{x}} = 0$ を示せ。

(3) $a \geq 1$ に対して、 $I(a) = \int_1^a \frac{\log x}{x\sqrt{x}} dx$ とおくとき、 $\lim_{a \rightarrow \infty} I(a)$ を求めよ。

(配点 25%)