

2006 年度

M 3

数 学

2 月 25 日(土)

理 学 部 (数 学 科)

13:00 ~ 15:00

【前 期 日 程】

注 意 事 項

試験開始前

- 1 監督者の指示があるまで、問題冊子、解答用紙に手を触れないでください。
- 2 監督者の指示に従って、全部の解答用紙(4 枚)に受験番号を記入してください。

試験開始後

- 3 この問題冊子は、4 ページあります。はじめに、問題冊子、解答用紙を確かめ、枚数の不足や、印刷の不鮮明なもの、ページの落丁・乱丁があった場合は、手をあげて監督者に申し出てください。
- 4 解答は、すべて別紙解答用紙に記入してください。
- 5 解答スペースが不足するときは、解答用紙の裏面も使用することが出来ます。ただし、その場合は、表面に「裏へつづく」と明記してください。
- 6 問題は、声を出して読むはいけません。
- 7 各問ごとの配点は、比率(%)で表示してあります。

試験終了後

- 8 問題冊子は、必ず持ち帰ってください。

- 1** 表と裏が同じ確率 $\frac{1}{2}$ で出るコインがある。座標平面上の原点 O から出発する点 P が次の規則に従って動くとする。

コインを投げたとき $\begin{cases} \text{表が出れば } x \text{ 軸の正の方向に } 1 \text{ 進む} \\ \text{裏が出れば } y \text{ 軸の正の方向に } 1 \text{ 進む} \end{cases}$

コインを n 回続けて投げたとする。途中の j 回目 ($1 \leq j \leq n$) のときの点 P を P_j とし、その座標を (X_j, Y_j) と表す。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 点 P_n の座標が $(k, n-k)$ である確率を求めよ。ただし $k = 0, 1, 2, \dots, n$ とする。
- (2) $n = 7$ のとき、点 P_5 の x 座標 X_5 が $X_5 \neq 3$ で、 P_7 の x 座標 X_7 が $X_7 \neq 4$ となる確率を求めよ。
- (3) $n = 5$ のとき、積 $X_5 Y_5$ の期待値を求めよ。

(配点 25%)

- 2** $\vec{a}, \vec{b}$ を2つの空間ベクトルとし、 $\vec{a}$ は零ベクトルではないとする。このとき、次の問いに答えよ。ただし、 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ は内積を表す。

- (1) 次の等式を示せ。

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|\vec{a} + x\vec{b}| - |\vec{a}|}{x} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|}$$

- (2) すべての正の数 x に対して、 $|\vec{a}| \leq |\vec{a} + x\vec{b}|$ が成り立つための必要十分条件は $\vec{a} \cdot \vec{b} \geq 0$ であることを示せ。
- (3) すべての実数 x に対して、 $|\vec{a}| \leq |\vec{a} + x\vec{b}|$ が成り立つための必要十分条件を $\vec{a} \cdot \vec{b}$ を用いて表せ。

(配点 25%)

3 $0 \leq \alpha < \beta < 2\pi$ を満たす α, β に対して、座標平面上の曲線 $C_{\alpha, \beta}$ を

$$x = \theta \cos \theta, y = \theta \sin \theta \quad (\alpha \leq \theta \leq \beta)$$

で定義する。次の問いに答えよ。

- (1) 原点 O を始点として $C_{0, \pi}$ 上の点 $(\theta \cos \theta, \theta \sin \theta)$ を終点とするベクトルを $\vec{v}_\theta$ と表す。 $\vec{v}_{\frac{\pi}{4}} \cdot \vec{v}_\theta = \frac{\pi}{8}\theta$ が成り立つとき、 θ を求めよ。ただし、 $\vec{v}_{\frac{\pi}{4}} \cdot \vec{v}_\theta$ は内積を表す。
- (2) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\theta \sin 2\theta + \theta^2 \cos 2\theta) d\theta$ を求めよ。
- (3) $C_{\frac{\pi}{2}, \pi}$ と 2 直線 x 軸, y 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(配点 25%)

4 k を定数とするとき、次の問いに答えよ。

(1) 関数 $f(x)$ を $f(x) = \log x - \sqrt[3]{x} + k$ ($x > 0$) としたとき、 $f(x) = 0$ が実数解をもつ k の範囲を求めよ。

(2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{\sqrt{x}} = 0$ を示せ。

(3) $a \geq 1$ に対して、 $I(a) = \int_1^a \frac{\log x}{x\sqrt{x}} dx$ とおくとき、 $\lim_{a \rightarrow \infty} I(a)$ を求めよ。

(配点 25%)