

p : 実数の定数

$x^2 - px - 1 = 0$ (...①) の 2 つの解が α, β

(1) 2 次方程式①の判別式を D とすると,

$$D = p^2 + 4 > 0$$

よって, ① は異なる 2 つの実数解をもつ.

すなわち, $\alpha \neq \beta$

(2) (1) より $\alpha \neq \beta$ なので,

$$\alpha^2 = \beta^2 \iff \alpha = -\beta \iff \alpha + \beta = 0$$

2 次方程式の解と係数の関係より

$$p = \alpha + \beta = 0 \dots (\text{答})$$

$$(3) \frac{1}{\alpha^2 \beta^2} + \frac{1}{\alpha^3 \beta} + \frac{1}{\alpha \beta^3} = -5$$

$$\iff \frac{1}{\alpha^3 \beta^3} (\alpha^2 + \alpha \beta + \beta^2) = -5$$

$$\iff \frac{1}{(\alpha \beta)^3} \{(\alpha + \beta)^2 - \alpha \beta\} = -5$$

$$\iff \frac{1}{(-1)^3} (p^2 + 1) = -5 \quad (\because \alpha + \beta = p, \alpha \beta = -1)$$

$$\iff p^2 = 4 \iff p = \pm 2 \dots (\text{答})$$

5 で割ると 2 余る正の整数は $5k-3$ (k は正の整数) と書ける.

$$1 \leq 5k-3 \leq 1000 \iff 4 \leq 5k \leq 1003$$

$$\iff \frac{4}{5} \leq k \leq 200 + \frac{3}{5}$$

より, $k=1, 2, 3, \dots, 200$ であるから

$$A = \{5k-3 \mid k=1, 2, 3, \dots, 200\}$$

正の 3 の倍数は $3l$ (l は正の整数) と書ける.

$$1 \leq 3l \leq 1000 \iff \frac{1}{3} \leq l \leq 333 + \frac{1}{3}$$

より, $l=1, 2, 3, \dots, 333$ であるから

$$B = \{3l \mid l=1, 2, 3, \dots, 333\}$$

$$(1) \quad 5k-3=3l \iff 5k=3(l+1)$$

3 と 5 は互いに素な整数であるから,

k は 3 の倍数であり, $k=3n$ (n は正の整数)

$l \geq 1$ より $5k \geq 3 \cdot (1+1) = 6$ すなわち $k \geq 2$

よって, $n \geq 1$ としてよく,

$$1 \leq 3n \leq 200 \iff \frac{1}{3} \leq n \leq 66 + \frac{2}{3}$$

$k=3n$ を $5k-3$ に代入して,

$$A \cap B = \{15n-3 \mid n=1, 2, \dots, 66\},$$

ゆえに, $a_n = 15n-3 \dots$ (答)

(2) (1) の議論より

$$n(A \cap B) = 66 \dots \text{(答)}$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$= 200 + 333 - 66$$

$$= 467 \dots \text{(答)}$$

(3) $[A \cap \bar{B}]$ の要素である数の総和

$= [A \text{ の要素である数の総和}] - [A \cap B \text{ の要素である数の総和}]$

集合 A の要素である数の総和を $S(A)$ などと書くことにすると,

$$S(A) = \sum_{k=1}^{200} (5k-3) = 5 \cdot \frac{200 \cdot 201}{2} - 3 \cdot 200$$

$$= 3 \cdot 200 \cdot \left(\frac{5 \cdot 67}{2} - 1 \right)$$

$$= 3 \cdot 100 \cdot 333$$

$$S(A \cap B) = \sum_{n=1}^{66} (15n-3) = 15 \cdot \frac{66 \cdot 67}{2} - 3 \cdot 66$$

$$= 3 \cdot 66 \cdot \left(\frac{5 \cdot 67}{2} - 1 \right)$$

$$= 3 \cdot 33 \cdot 333$$

ゆえに

$$S(A \cap \bar{B}) = S(A) - S(A \cap B)$$

$$= 3 \cdot 333 \cdot (100 - 33)$$

$$= 3 \cdot 333 \cdot 67 = (1000 - 1) \cdot 67$$

$$= 67000 - 67 = 66933 \dots \text{(答)}$$

(1) $y = x^2$ より $y' = 2x$

よって、 $y = x^2$ 上の点 $A(a, a^2)$ における接線の方程式は

$$y - a^2 = 2a(x - a) \quad \text{すなわち} \quad y = 2ax - a^2 \quad \dots \text{(答)}$$

(2) 点 A が原点と異なる $\iff a \neq 0 \dots (\Lambda)$

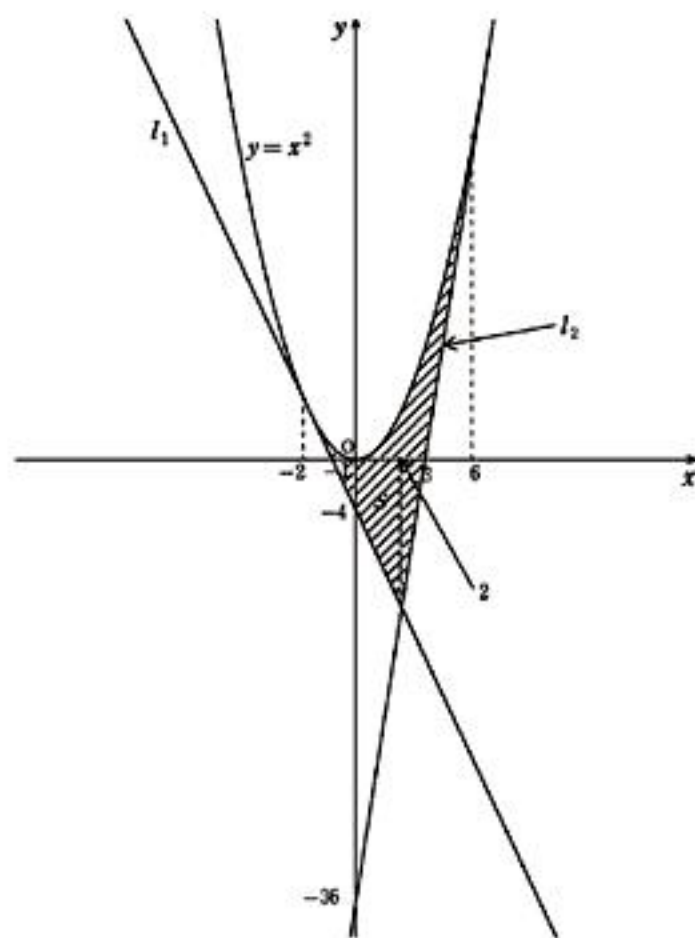
$$l_1 \text{ が点 } B(-1, 0) \text{ を通る} \iff 0 = -2a - a^2 \iff a = -2 \quad (\because (\Lambda))$$

$$l_2 \text{ が点 } C(3, 0) \text{ を通る} \iff 0 = 6a - a^2 \iff a = 6 \quad (\because (\Lambda))$$

よって、

$$l_1 : y = -4x - 4 \quad l_2 : y = 12x - 36 \quad \dots \text{(答)}$$

(3)



l_1 と l_2 の交点の x 座標について、

$$-4x - 4 = 12x - 36 \iff 16x = 32 \iff x = 2$$

曲線の位置関係は上図のようになっているので、求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^2 \{x^2 - (-4x - 4)\} dx + \int_2^6 \{x^2 - (12x - 36)\} dx \\ &= \int_{-2}^2 (x+2)^2 dx + \int_2^6 (x-6)^2 dx \\ &= \left[\frac{1}{3}(x+2)^3 \right]_{-2}^2 + \left[\frac{1}{3}(x-6)^3 \right]_2^6 \\ &= \frac{1}{3} \cdot 4^3 - \frac{1}{3}(-4)^3 = \frac{2}{3} \cdot 4^3 = \frac{128}{3} \quad \dots \text{(答)} \end{aligned}$$

$$(1) \quad t = \sin \theta + \cos \theta$$

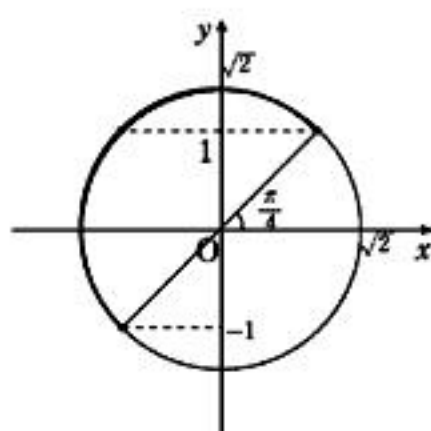
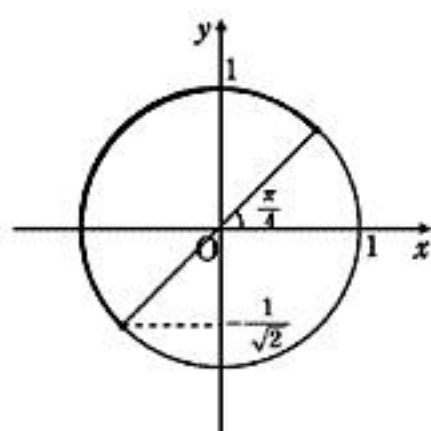
$$\begin{aligned} t^2 &= \sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta \\ &= 1 + 2 \sin \theta \cos \theta \end{aligned}$$

$$\text{よって, } \sin \theta \cos \theta = \frac{t^2 - 1}{2} \quad \dots (\text{答})$$

$$(2) \quad t = \sin \theta + \cos \theta$$

$$= \sqrt{2} \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$0 \leq \theta \leq \pi \text{ より } \frac{\pi}{4} \leq \theta + \frac{\pi}{4} \leq \frac{5}{4} \pi$$



$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) \leq 1 \text{ より}$$

$$-1 \leq t \leq \sqrt{2} \quad \dots (\text{答})$$

$$(3) \quad 2 \sin \theta \cos \theta - 2(\sin \theta + \cos \theta) = k \text{ を } t \text{ で表すと,}$$

$$2 \cdot \frac{t^2 - 1}{2} - 2t = k$$

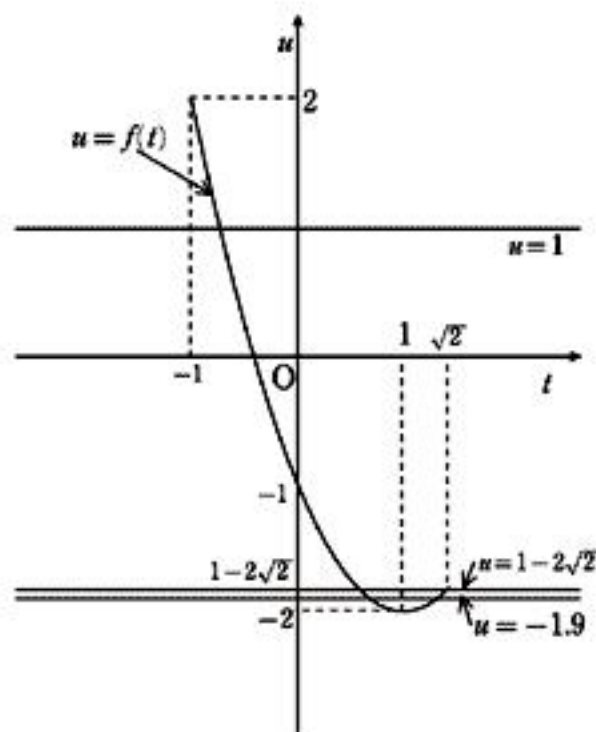
$$t^2 - 2t - 1 = k \text{ (左辺を } f(t) \text{ とおく)}$$

t に対する θ の個数の対応について

(2) より

$$\left\{ \begin{array}{ll} t = \sqrt{2} \text{ のとき, } \left[\theta = \frac{\pi}{4} \text{ の} \right] 1 \text{ 個} \\ 1 \leq t < \sqrt{2} \text{ のとき,} & 2 \text{ 個} \\ -1 \leq t < 1 \text{ のとき,} & 1 \text{ 個} \\ \text{その他の場合} & 0 \text{ 個} \end{array} \right\} \quad (\text{A})$$

$$f(\sqrt{2}) = 1 - 2\sqrt{2}, \quad f(1) = -2, \quad f(-1) = 2$$



tu 平面上で $u = f(t)$ と $u = k$ の共有点を考えると, (A) より

$k = 1$ のとき, $-1 \leq t < 1$ に 1 個 $\rightarrow \theta$ は 1 個

$k = 1 - 2\sqrt{2}$ のとき, $-1 \leq t < 1$ に 1 個, $t = \sqrt{2}$ に 1 個 $\rightarrow \theta$ は 2 個

$k = -1.9$ のとき, $-1 \leq t < 1$ に 1 個, $1 \leq t < \sqrt{2}$ に 1 個 $\rightarrow \theta$ は 3 個

(答)