

5で割る $\angle$ 2余る正の整数は $5k-3$ (k は正の整数)と書ける.

$$1 \leq 5k-3 \leq 1000 \iff 4 \leq 5k \leq 1003$$

$$\iff \frac{4}{5} \leq k \leq 200 + \frac{3}{5}$$

より, $k=1, 2, 3, \dots, 200$ であるから

$$A = \{5k-3 \mid k=1, 2, 3, \dots, 200\}$$

正の3の倍数は $3l$ (l は正の整数)と書ける.

$$1 \leq 3l \leq 1000 \iff \frac{1}{3} \leq l \leq 333 + \frac{1}{3}$$

より, $l=1, 2, 3, \dots, 333$ であるから.

$$B = \{3l \mid l=1, 2, 3, \dots, 333\}$$

$$(1) \quad 5k-3=3l \iff 5k=3(l+1).$$

3と5は互いに素な整数であるから,

k は3の倍数であり, $k=3n$ (n は正の整数)

$l \geq 1$ より $5k \geq 3 \cdot (1+1) = 6$ 3ゆえに $k \geq 2$.

よて, $n \geq 1$ とおく.

$$1 \leq 3n \leq 200 \iff \frac{1}{3} \leq n \leq 66 + \frac{2}{3}$$

$k=3n$ を $5k-3$ に代入して

$$A \cap B = \{15n-3 \mid n=1, 2, \dots, 66\}.$$

ゆえに, $a_n = 15n-3$... (答)

(2) (1)の議論により,

$$n(A \cap B) = 66. \quad \text{--- (答)}$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$= 200 + 333 - 66$$

$$= 467 \quad \text{--- (答)}$$

(3) $[A \cap \bar{B}]$ の要素である数の総和.]

$$= [A \text{の要素である数の総和}] - [A \cap B \text{の要素である数の総和}]$$

集合 A の要素である数の総和を $s(A)$ と書くことにする.

$$s(A) = \sum_{k=1}^{200} (5k-3) = 5 \cdot \frac{200 \cdot 201}{2} - 3 \cdot 200$$

$$= 3 \cdot 200 \cdot \left(\frac{5 \cdot 67}{2} - 1 \right)$$

$$= 3 \cdot 100 \cdot 333$$

$$s(A \cap B) = \sum_{n=1}^{66} (15n-3) = 15 \cdot \frac{66 \cdot 67}{2} - 3 \cdot 66$$

$$= 3 \cdot 66 \cdot \left(\frac{5 \cdot 67}{2} - 1 \right)$$

$$= 3 \cdot 33 \cdot 333$$

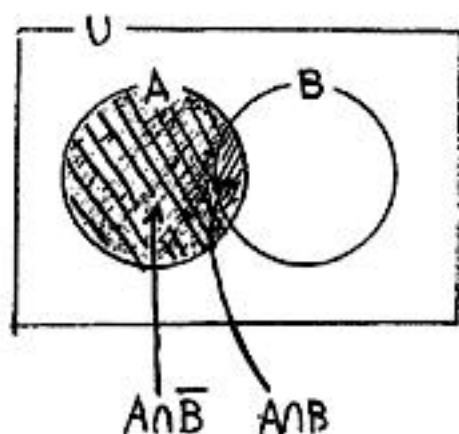
ゆえに

$$s(A \cap \bar{B}) = s(A) - s(A \cap B)$$

$$= 3 \cdot 333 \cdot (100 - 33)$$

$$= 3 \cdot 333 \cdot 67 = (1000 - 1) \cdot 67$$

$$= 67000 - 67 = 66933 \quad \text{--- (答)}$$



$$(1) \quad t = \sin \theta + \cos \theta$$

$$t^2 = \sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta$$

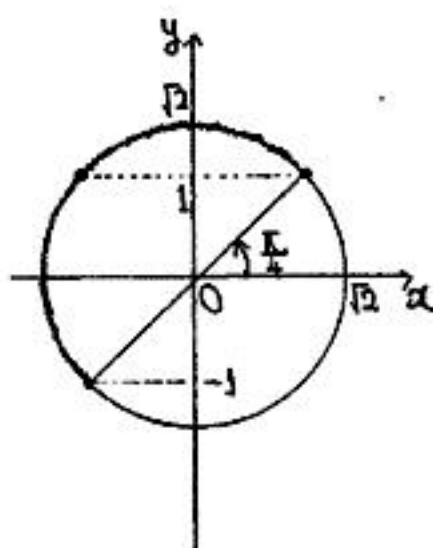
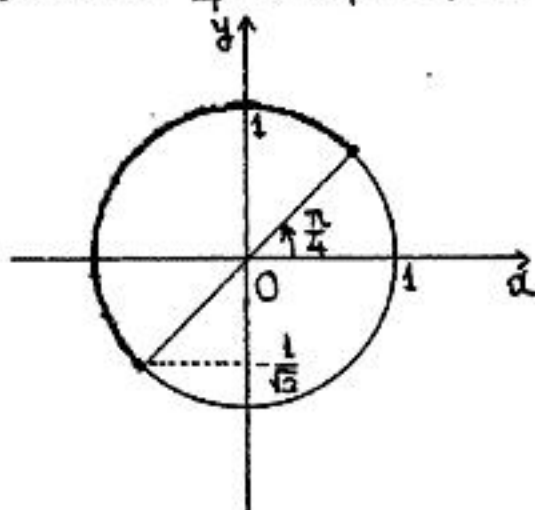
$$= 1 + 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\therefore \tau. \sin \theta \cos \theta = \frac{t^2 - 1}{2} \quad \dots (\text{答})$$

$$(2) \quad t = \sin \theta + \cos \theta$$

$$= \sqrt{2} \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$0 \leq \theta \leq \pi \text{ より } \frac{\pi}{4} \leq \theta + \frac{\pi}{4} \leq \frac{5\pi}{4}.$$



$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) \leq 1 \text{ より}$$

$$-1 \leq t \leq \sqrt{2} \quad \dots (\text{答})$$

$$(3) \quad 2 \sin \theta \cos \theta - 2(\sin \theta + \cos \theta) = k \quad \text{を } t \text{ で表すと}$$

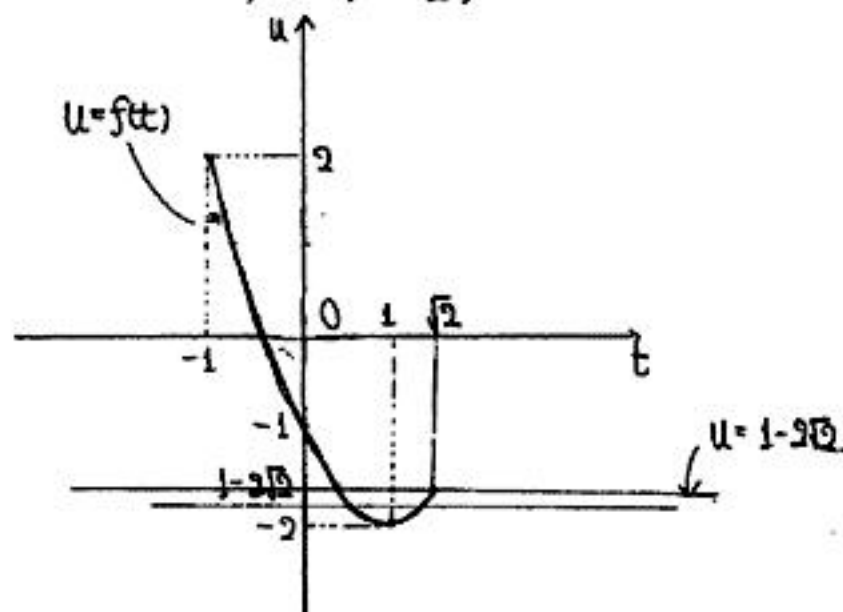
$$2 \cdot \frac{t^2 - 1}{2} - 2t = k$$

$$t^2 - 2t - 1 = k \quad (\text{左辺を } f(t) \text{ とおく})$$

t に対する θ の個数の対応について

$$(2) \text{ より } \left. \begin{array}{ll} t = \sqrt{2} \text{ のとき, } [\theta = \frac{\pi}{4} \text{ の}] & 1 \text{ 個} \\ 1 \leq t < \sqrt{2} \text{ のとき,} & 2 \text{ 個} \\ -1 \leq t < 1 \text{ のとき,} & 1 \text{ 個} \\ \text{その他の場合} & 0 \text{ 個} \end{array} \right\} \textcircled{A}$$

$$f(\sqrt{2}) = 1 - 2\sqrt{2}, \quad f(1) = -2, \quad f(-1) = 2.$$



tu 平面上で $u = f(t)$ と $u = k$ の共有点を考える。①より

$$\left. \begin{array}{ll} k < -2, \quad 2 < k \text{ のとき} & 0 \text{ 個} \\ 1 - 2\sqrt{2} < k \leq 2 \text{ のとき} & 1 \text{ 個} \\ k = -2, \quad 1 - 2\sqrt{2} \text{ のとき} & 2 \text{ 個} \\ -2 < k < 1 - 2\sqrt{2} \text{ のとき} & 3 \text{ 個} \end{array} \right\} \dots (\text{答})$$

(1) $x \geq 1$ の下では.

$$x^2 - 1 \geq 2x \log x \iff x - \frac{1}{x} \geq 2 \log x \quad \text{--- ①}$$

$$f(x) = (x - \frac{1}{x}) - 2 \log x \quad x \geq 1.$$

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2} = \frac{(x-1)^2}{x^2}$$

$x \geq 1$ において, $f'(x) \geq 0$ であるから $f(x)$ は単調増加で

$$f(1) = (1 - \frac{1}{1}) - 2 \log 1 = 0.$$

よって, $f(x) \geq 0$ ($x \geq 1$) より ① が示された.

(2) (1)より, $x \geq 1$ において.

$y = x^2 - 1$ のグラフは $y = 2x \log x$ のグラフより上にある.

よって, 求める面積 S は

$$S = \int_1^2 \{ (x^2 - 1) - 2x \log x \} dx$$

$$\begin{aligned} \int 2x \log x dx &= x^2 \log x - \int x^2 \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= x^2 \log x - \frac{1}{2} x^2 + C \quad (C \text{ は積分定数}) \end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned} S &= \left[\frac{1}{3} x^3 - x \right]_1^2 - \left[x^2 \log x - \frac{1}{2} x^2 \right]_1^2 \\ &= \left(\frac{8}{3} - 2 \right) - \left(\frac{1}{3} - 1 \right) - \left\{ (4 \log 2 - 2) - \left(-\frac{1}{2} \right) \right\} \\ &= \frac{7}{3} + 1 - 4 \log 2 - \frac{1}{2} \\ &= \frac{17}{6} - 4 \log 2 \quad \text{--- (答)} \end{aligned}$$

(3) 微分係数の定義によつて, $g(x) = \log x$ $x > 0$ $g'(x) = \frac{1}{x}$, $g(1) = 0$ で

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log x}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - g(1)}{x-1} \\ &= g'(1) = 1 \quad (\lim \text{ の存在と極限値を示す.}) \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x} = \lim_{x \rightarrow 1} \left(1 + \frac{1}{x} \right) = 2.$$

よって

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2x \log x} &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{x+1}{x} \cdot \frac{x-1}{\log x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{x+1}{x} \cdot \frac{1}{\frac{\log x}{x-1}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x} \right) \cdot \left(\frac{1}{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log x}{x-1}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{1}{1} = 1 \quad \text{--- (答)} \end{aligned}$$

(4) $x \geq 1$ のとき, 常に $x^2 - 1 \geq 2ax \log x$ が成り立つ a の最大値を求めよ.

$x = 1$ のとき, 不等式は常に成り立つ.

$x > 1$ のとき, $x \log x \neq 0$ であるから,

$$x^2 - 1 \geq 2ax \log x \iff a \leq \frac{x^2 - 1}{2x \log x}$$

$$\therefore (3) \text{ より } \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x^2 - 1}{2x \log x} = 1 \text{ であるから,}$$

$a \leq 1$ となる必要があるが (1) で示した

不等式より $a = 1$ のときは, $x \geq 1$ で常に

$x^2 - 1 \geq 2ax \log x$ が成り立つ.

したがって, 求める a の最大値は 1 ... (答)

4

a, θ, c は実数. $A = \begin{pmatrix} a & \theta \\ 0 & c \end{pmatrix}$

$$(1) A^2 = \begin{pmatrix} a & \theta \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & \theta \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & \theta(a+c) \\ 0 & c^2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} a^2 & \theta(a+c) \\ 0 & c^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & \theta \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^3 & \theta(a^2+ac+c^2) \\ 0 & c^3 \end{pmatrix}$$

$$\text{よって } A^n = \begin{pmatrix} a^n & \theta(a^{n-1} + a^{n-2}c + \dots + ac^{n-2} + c^{n-1}) \\ 0 & c^n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a^n & \theta \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} c^k \\ 0 & c^n \end{pmatrix} \quad \text{--- (A)}$$

と推定できるので、これを数学的帰納法で証明する。

(i) $n=1$ のとき

$$\begin{pmatrix} a^1 & \theta \sum_{k=0}^0 a^{1-1-k} c^k \\ 0 & c^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^1 & \theta \cdot a^0 \cdot c^0 \\ 0 & c^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & \theta \\ 0 & c \end{pmatrix} = A$$

より成り立つ。

(ii) $n=m$ (≥ 1) のとき成り立つと仮定する

$$A^m = \begin{pmatrix} a^m & \theta \sum_{k=0}^{m-1} a^{m-1-k} c^k \\ 0 & c^m \end{pmatrix}$$

このとき

$$\begin{aligned} A^{m+1} &= A^m \cdot A = \begin{pmatrix} a^m & \theta \sum_{k=0}^{m-1} a^{m-1-k} c^k \\ 0 & c^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & \theta \\ 0 & c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^{m+1} & a^m \theta + \left(\theta \sum_{k=0}^{m-1} a^{m-1-k} c^k \right) \cdot c \\ 0 & c^{m+1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^{m+1} & \theta \left(a^m + \sum_{k=0}^{m-1} a^{m-1-k} c^{k+1} \right) \\ 0 & c^{m+1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^{m+1} & \theta \left(a^m + \sum_{k=1}^m a^{m-k} c^k \right) \\ 0 & c^{m+1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^{m+1} & \theta \sum_{k=0}^m a^{m-k} c^k \\ 0 & c^{m+1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

よって、 $n=m+1$ のときにも成り立つ。

(i)(ii)より、すべての自然数 n に対して (A) が成り立つ。

(2) 成分で考える。

$$A^2 = E \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a^2 & \theta(a+c) \\ 0 & c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow a^2 = 1, c^2 = 1, \theta(a+c) = 0.$$

$$\theta(a+c) = 0 \Leftrightarrow \theta = 0 \text{ または } a+c = 0.$$

(i) $a+c=0$ のとき、 $(a, c) = (1, -1), (-1, 1)$ で θ は任意の実数

(ii) $\theta = 0$ のとき、 $(a, c) = (\pm 1, \pm 1)$ (複3任意)

(i)(ii)より $A = \pm E, \begin{pmatrix} 1 & \theta \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & \theta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (θ は任意の実数) --- (答)

$$A^3 = E \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a^3 & \theta(a^2+ac+c^2) \\ 0 & c^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow a^3 = 1, c^3 = 1, \theta(a^2+ac+c^2) = 0$$

a, c は実数なので $a = c = 1$ のとき、 $a^2+ac+c^2 \neq 0$ より $\theta = 0$

よって $A = E$. --- (答)

$$(3) A^n = E \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a^n & \theta \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} c^k \\ 0 & c^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{a^n = 1, c^n = 1}_{\text{(A)}} \cdot \underbrace{\theta \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} c^k = 0}_{\text{(B)}}$$

(i) n が奇数のとき

$$\text{(A)} \Leftrightarrow a = c = 1. \text{ このとき } \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} c^k = \sum_{k=0}^{n-1} 1^{n-1-k} 1^k = \sum_{k=0}^{n-1} 1 = n \neq 0 \text{ より (B) から } \theta = 0$$

(ii) n が偶数のとき

$$\text{(A)} \Leftrightarrow (a, c) = (\pm 1, \pm 1) \text{ (複3任意)}$$

$a+c$ が 0 が 2 つかで場合分けする。

(1) $(a, c) = (\pm 1, \pm 1)$ (複3同順) のとき

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} c^k &= \sum_{k=0}^{n-1} (\pm 1)^{n-1-k} (\pm 1)^k \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (\pm 1)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (\pm 1) = \pm n \neq 0 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{よって (B) から } \theta = 0 \\ (\because n-1 \text{ は奇数}) \end{array} \right\} \text{(複3同順)}$$

(2) $(a, c) = (\pm 1, \mp 1)$ (複3同順) のとき

$$\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} c^k = \sum_{k=0}^{n-1} a^n c^{n-1-k} \text{ であることに注意する}$$

$$\begin{aligned} (a, c) = (1, -1) \text{ のとき } \sum_{k=0}^{n-1} 1^{n-1-k} \cdot (-1)^k &= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k = \frac{1 \cdot \{1 - (-1)^n\}}{1 - (-1)} = 0 \\ &\quad \uparrow (\because n \text{ は偶数より } (-1)^n = 1) \\ \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} c^k &= \end{aligned} \quad \left[\begin{array}{l} \text{初項 } 1, \text{ 公比 } -1 \text{ の等比数列の} \\ \text{初項から第 } n \text{ 項までの和} \end{array} \right]$$

$(a, c) = (-1, 1)$ のとき

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k 1^{n-1-k} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \cdot 1^{n-1-k} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k = 0$$

よって、(B) から θ は任意の実数

以上より

$$A = \begin{cases} E & (n \text{ が奇数のとき}) \\ \pm E, \begin{pmatrix} 1 & \theta \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & \theta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & (n \text{ が偶数のとき}) \end{cases} \quad \text{--- (答)}$$

(θ は任意の実数)