

2007 年度

M 3

数 学

2 月 25 日(日)

理 学 部 (数 学 科)

13:00 ~ 15:00

【前 期 日 程】

注 意 事 項

試験開始前

- 1 監督者の指示があるまで、問題冊子、解答用紙に手を触れないでください。
- 2 監督者の指示に従って、全部の解答用紙(4 枚)に受験番号を記入してください。

試験開始後

- 3 この問題冊子は、4 ページあります。はじめに、問題冊子、解答用紙を確かめ、枚数の不足や、印刷の不鮮明なもの、ページの落丁・乱丁があった場合は、手をあげて監督者に申し出てください。
- 4 解答は、すべて別紙解答用紙に記入してください。
- 5 解答スペースが不足するときは、解答用紙の裏面も使用することが出来ます。ただし、その場合は、表面に「裏へつづく」と明記してください。
- 6 問題は、声を出して読むはいけません。
- 7 各問ごとの配点は、比率(%)で表示してあります。

試験終了後

- 8 問題冊子は、必ず持ち帰ってください。

1 1 から 1000 までの整数の集合 U の中で, 5 で割ると 2 余る数の集合を A とし, 3 の倍数の集合を B とする。次の問いに答えよ。

- (1) 集合 $A \cap B$ の要素である数を小さい方から順に並べたとき, 第 n 番目の数を a_n とする。 a_n を n の式で表せ。
- (2) 集合 $A \cap B$ の要素の個数と集合 $A \cup B$ の要素の個数を求めよ。
- (3) 集合 $A \cap \overline{B}$ の要素である数の総和を求めよ。ただし, $\overline{B}$ は集合 B の補集合を表す。

(配点 25%)

2 次の問いに答えよ。

- (1) $t = \sin \theta + \cos \theta$ とおく。 $\sin \theta \cos \theta$ を t を用いて表せ。
- (2) $0 \leq \theta \leq \pi$ のとき, $t = \sin \theta + \cos \theta$ のとりうる値の範囲を求めよ。
- (3) $0 \leq \theta \leq \pi$ のとき, θ の方程式

$$2 \sin \theta \cos \theta - 2(\sin \theta + \cos \theta) - k = 0$$

の解の個数は, 定数 k の値によってどのように変化するかを調べよ。

(配点 25%)

3

次の問いに答えよ。

- (1) $x \geq 1$ のとき、次の不等式が成り立つことを示せ。

$$x^2 - 1 \geq 2x \log x$$

- (2) $x \geq 1$ のとき、2つの曲線 $y = x^2 - 1$, $y = 2x \log x$ および直線 $x = 2$ で囲まれた図形の面積を求めよ。

- (3) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2x \log x}$ を求めよ。

- (4) $x \geq 1$ ならば常に $x^2 - 1 \geq 2ax \log x$ となるような定数 a のうちで最大の a の値を求めよ。

(配点 25%)

4 a, b, c を実数とし, 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ とおく。また, 行列 $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする。次の問いに答えよ。

- (1) n を自然数とする。 A^2, A^3 を求めて, A^n を推定し, それが正しいことを数学的帰納法によって証明せよ。
- (2) $A^2 = E$ を満たす A を求めよ。また, $A^3 = E$ を満たす A を求めよ。
- (3) n を自然数とするとき, $A^n = E$ を満たす A を求めよ。

(配点 25%)