

(1) x, y が整数のとき、 $x+y, x-y$ は整数である。

$(x+y) - (x-y) = 2y$ は偶数であるから、 $x+y$ と $x-y$ の偶奇は一致する。

$x+y$ と $x-y$ がともに偶数のとき、積 $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$ は 4 の倍数であり、

$x+y$ と $x-y$ がともに奇数のとき、積 $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$ は奇数である。

(2) (i) $x+y \geq x-y$ を考慮すると

$$(x+y, x-y) = (2, 2) \Leftrightarrow (x, y) = (2, 0) \text{ のとき、} 4 = x^2 - y^2$$

$$(x+y, x-y) = (4, 2) \Leftrightarrow (x, y) = (3, 1) \text{ のとき、} 8 = x^2 - y^2$$

$$(x+y, x-y) = (6, 2) \Leftrightarrow (x, y) = (4, 2) \text{ のとき、} 12 = x^2 - y^2$$

である。

(ii) n は 4 の倍数であるから、 n を素因数分解すると

$p_1, p_2, \dots, p_k$ を相異なる奇素数として

$$n = 2^{i+2} p_1^{j_1} p_2^{j_2} \dots p_k^{j_k}$$

$$[i, j_1, j_2, \dots, j_k \text{ は非負整数}]$$

と表せる。2 つの偶数 n_α, n_β を

$$n_\alpha = 2^{i_\alpha+1} p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k} = 2\alpha$$

$$n_\beta = 2^{i_\beta+1} p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_k^{\beta_k} = 2\beta$$

$$[\text{ただし、} i_\alpha, i_\beta, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k \text{ は非負整数}]$$

$$i_\alpha + i_\beta = i, \alpha_1 + \beta_1 = j_1, \alpha_2 + \beta_2 = j_2, \dots, \alpha_k + \beta_k = j_k]$$

で $n_\alpha \geq n_\beta \geq 2 (\Leftrightarrow \alpha \geq \beta \geq 1)$ を満たすよう定めて、

$$x+y = n_\alpha = 2\alpha, x-y = n_\beta = 2\beta$$

とすると

$$x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$$

$$= n_\alpha n_\beta$$

$$= 2^{i_\alpha+i_\beta+2} p_1^{\alpha_1+\beta_1} p_2^{\alpha_2+\beta_2} \dots p_k^{\alpha_k+\beta_k}$$

$$= 2^{i+2} p_1^{j_1} p_2^{j_2} \dots p_k^{j_k}$$

$$= n$$

(1) a, b を有理数、 n を自然数とする。

2 次方程式 $x^2 + ax + b = 0$ (…… ①) の解が α, β である。

すなわち

$$x^2 + ax + b = (x - \alpha)(x - \beta) \quad \dots\dots\dots ②$$

と因数分解できる。

$\beta = n + \sqrt{3}$ が ① の解であるから、 $x = \beta$ を ① に代入して

$$\beta^2 + a\beta + b = 0$$

$$\Leftrightarrow (n + \sqrt{3})^2 + a(n + \sqrt{3}) + b = 0$$

$$\Leftrightarrow (n^2 + an + b + 3) + (2n + a)\sqrt{3} = 0$$

$n^2 + an + b + 3, 2n + a$ は有理数、 $\sqrt{3}$ は無理数である。

$2n + a \neq 0$ と仮定すると

$$\sqrt{3} = -\frac{n^2 + an + b + 3}{2n + a}$$

左辺は無理数、有理数の集合は除法について閉じているから

右辺は有理数となり矛盾する。

よって

$$2n + a = 0 \text{ かつ } n^2 + an + b + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow a = -2n \text{ かつ } b = n^2 - 3$$

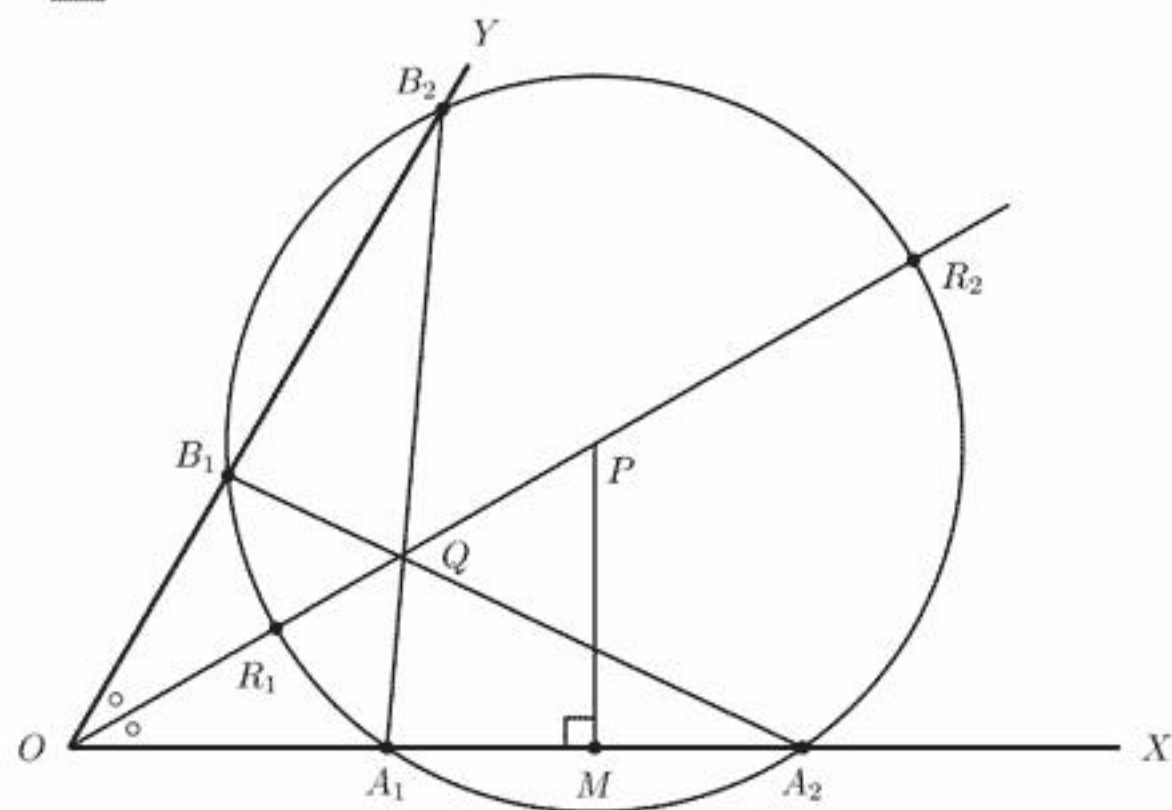
ゆえに、 $b > 0$ となるための n の条件は

$$n^2 - 3 > 0$$

n は自然数であるから、 $n \geq 2$ である。

(2) 2 次方程式 ① の解と係数の関係、あるいは恒等式 ② が成り立つから

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -a = 2n & \dots\dots\dots ③ \\ \alpha\beta = b = n^2 - 3 & \dots\dots\dots ④ \end{cases}$$



(1) 問題の条件から

$$\overrightarrow{OA_1} = t_1 \vec{a}, \quad \overrightarrow{OA_2} = t_2 \vec{a} \quad \dots\dots\dots ①$$

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1 \quad \dots\dots\dots ②$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \quad \dots\dots\dots ③$$

である。②,③ より

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 3$$

$$\therefore |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{3}$$

であるから $\vec{a} + \vec{b}$ 方向の単位ベクトルは $\pm \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{a} + \vec{b})$ である。

半直線 OP は 2 本の半直線 OX, OY のなす角 θ の二等分線であるから、② より

$$\overrightarrow{OP} \parallel \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \vec{a} + \vec{b}$$

a, n は自然数、 $a \geq 2, n \geq 2$ とする。

- (1) $\log_a 2$ が正の有理数であるから、
 p, q を互いに素（最大公約数が 1）である自然数として

$$\log_a 2 = \frac{q}{p}$$

とおくと

$$a^{\frac{q}{p}} = 2$$

両辺を p 乗して

$$a^q = 2^p \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

a が 2 以外の素因数をもつとすると、自然数 $\textcircled{1}$ に対して
 左辺は 2 以外の素因数をもち右辺はもたないので、
 素因数分解の一意性に反する。

よって、 m を自然数として $a = 2^m$ とおける。

2^m の約数は $2^k (k = 0, 1, \dots, m)$ のみであるから、
 a の約数で素数となるものは 2 しかない。

また、 $a = 2^m$ を代入して

$$(2^m)^q = 2^p$$

これより

$$p = mq$$

$p = mq$, q はともに q の倍数であり、 p, q は互いに素であるから

$$q = 1, p = m$$

である。