

(1)  $x, y$  が整数のとき、 $x+y, x-y$  は整数である。

$(x+y) - (x-y) = 2y$  は偶数であるから、 $x+y$  と  $x-y$  の偶奇は一致する。

$x+y$  と  $x-y$  がともに偶数のとき、積  $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$  は4の倍数であり、

$x+y$  と  $x-y$  がともに奇数のとき、積  $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$  は奇数である。

(2) (i)  $x+y \geq x-y$  を考慮すると

$$(x+y, x-y) = (2, 2) \Leftrightarrow (x, y) = (2, 0) \text{ のとき、 } 4 = x^2 - y^2$$

$$(x+y, x-y) = (4, 2) \Leftrightarrow (x, y) = (3, 1) \text{ のとき、 } 8 = x^2 - y^2$$

$$(x+y, x-y) = (6, 2) \Leftrightarrow (x, y) = (4, 2) \text{ のとき、 } 12 = x^2 - y^2$$

である。

(ii)  $n$  は4の倍数であるから、 $n$  を素因数分解すると

$p_1, p_2, \dots, p_k$  を相異なる奇素数として

$$n = 2^{i+2} p_1^{j_1} p_2^{j_2} \dots p_k^{j_k}$$

$$[i, j_1, j_2, \dots, j_k \text{ は非負整数}]$$

と表せる。2つの偶数  $n_\alpha, n_\beta$  を

$$n_\alpha = 2^{i_\alpha+1} p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k} = 2\alpha$$

$$n_\beta = 2^{i_\beta+1} p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_k^{\beta_k} = 2\beta$$

[ただし、 $i_\alpha, i_\beta, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$  は非負整数

$$i_\alpha + i_\beta = i, \alpha_1 + \beta_1 = j_1, \alpha_2 + \beta_2 = j_2, \dots, \alpha_k + \beta_k = j_k]$$

で  $n_\alpha \geq n_\beta \geq 2$  ( $\Leftrightarrow \alpha \geq \beta \geq 1$ ) を満たすよう定めて、

$$x+y = n_\alpha = 2\alpha, \quad x-y = n_\beta = 2\beta$$

とすると

$$x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$$

$$= n_\alpha n_\beta$$

$$= 2^{i_\alpha+i_\beta+2} p_1^{\alpha_1+\beta_1} p_2^{\alpha_2+\beta_2} \dots p_k^{\alpha_k+\beta_k}$$

$$= 2^{i+2} p_1^{j_1} p_2^{j_2} \dots p_k^{j_k}$$

$$= n$$

$a, b$  を定数とする。

2 次方程式  $x^2 + ax + b = 0$  ( ..... ① ) の解が  $\alpha, \beta$  である。

すなわち

$$x^2 + ax + b = (x - \alpha)(x - \beta) \quad \text{..... ②}$$

と因数分解できる。

(1)

$$\begin{aligned} & \int_{\alpha}^{\beta} (x^2 + ax + b) dx \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha) \{ (x - \alpha) + (\alpha - \beta) \} dx \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)^2 dx - (\beta - \alpha) \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha) dx \\ &= \left[ \frac{1}{3} (x - \alpha)^3 \right]_{\alpha}^{\beta} - (\beta - \alpha) \left[ \frac{1}{2} (x - \alpha)^2 \right]_{\alpha}^{\beta} \\ &= \frac{1}{3} (\beta - \alpha)^3 - \frac{1}{2} (\beta - \alpha)^3 \\ &= -\frac{1}{6} (\beta - \alpha)^3 \end{aligned}$$

である。

(1) 点 O を原点とする座標平面上において、

行列  $A = \begin{pmatrix} 10 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 8 \end{pmatrix}$  で表される 1 次変換で

点  $P(\cos \theta, \sin \theta)$  が点  $Q$  に移るから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ} &= A\overrightarrow{OP} \\ &= \begin{pmatrix} 10 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 10 \cos \theta + \sqrt{3} \sin \theta \\ \sqrt{3} \cos \theta + 8 \sin \theta \end{pmatrix}\end{aligned}$$

よって、点  $Q$  の座標は  $(10 \cos \theta + \sqrt{3} \sin \theta, \sqrt{3} \cos \theta + 8 \sin \theta)$  である。

(2)

$$\begin{aligned}f(\theta) &= \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \cos \theta + \sqrt{3} \sin \theta \\ \sqrt{3} \cos \theta + 8 \sin \theta \end{pmatrix} \\ &= \cos \theta (10 \cos \theta + \sqrt{3} \sin \theta) + \sin \theta (\sqrt{3} \cos \theta + 8 \sin \theta) \\ &= 10 \cos^2 \theta + 2\sqrt{3} \sin \theta \cos \theta + 8 \sin^2 \theta \\ &= 10 \cdot \frac{1 + \cos 2\theta}{2} + \sqrt{3} \sin 2\theta + 8 \cdot \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \\ &= \sqrt{3} \sin 2\theta + \cos 2\theta + 9 \\ &= 2 \sin(2\theta + \alpha) + 9 \quad \left( \text{ただし } \alpha = \frac{\pi}{6} \right)\end{aligned}$$

$0 \leq \theta \leq \pi$  より、 $2\theta + \alpha$  は  $\alpha \leq 2\theta + \alpha \leq 2\pi + \alpha$  (区間の幅  $2\pi$ ) を満たすすべての値をとりうる。

したがって、 $f(\theta)$  は

$$\begin{cases} 2\theta + \alpha = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{6} \text{ のとき、最大値 } 11 \\ 2\theta + \alpha = \frac{3}{2}\pi \Leftrightarrow \theta = \frac{2}{3}\pi \text{ のとき、最小値 } 7 \end{cases}$$

をとる。

(1)

$$2 \cos 2kx \sin x = \sin(2k+1)x - \sin(2k-1)x$$

であるから、 $n$  が自然数であるとき

$$\begin{aligned} & (1 + 2 \cos 2x + 2 \cos 4x + \cdots + 2 \cos 2nx) \sin x \\ &= \sin x + \sum_{k=1}^n 2 \cos 2kx \sin x \\ &= \sin x + \sum_{k=1}^n \{\sin(2k+1)x - \sin(2k-1)x\} \\ &= \sin x + \sum_{k=1}^n \sin(2k+1)x - \sum_{k=0}^{n-1} \sin(2k+1)x \\ &= \sin x + \sin(2n+1)x - \sin x \\ &= \sin(2n+1)x \end{aligned}$$

である。また

$$\sin(2k-1)x \sin x = \frac{1}{2} \{\cos 2(k-1)x - \cos 2kx\}$$

であるから、 $n$  が自然数であるとき

$$\begin{aligned} & \{\sin x + \sin 3x + \sin 5x + \cdots + \sin(2n-1)x\} \sin x \\ &= \sum_{k=1}^n \sin(2k-1)x \sin x \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \{\cos 2(k-1)x - \cos 2kx\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} \cos 2kx - \sum_{k=1}^n \cos 2kx \right\} \\ &= \frac{1}{2} (1 - \cos 2nx) \\ &= \sin^2 nx \end{aligned}$$

である。