

(1) x, y が整数のとき、 $x+y, x-y$ は整数である。

$(x+y) - (x-y) = 2y$ は偶数であるから、 $x+y$ と $x-y$ の偶奇は一致する。

$x+y$ と $x-y$ がともに偶数のとき、積 $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$ は 4 の倍数であり、

$x+y$ と $x-y$ がともに奇数のとき、積 $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$ は奇数である。

(2) (i) $x+y \geq x-y$ を考慮すると

$$(x+y, x-y) = (2, 2) \Leftrightarrow (x, y) = (2, 0) \text{ のとき、 } 4 = x^2 - y^2$$

$$(x+y, x-y) = (4, 2) \Leftrightarrow (x, y) = (3, 1) \text{ のとき、 } 8 = x^2 - y^2$$

$$(x+y, x-y) = (6, 2) \Leftrightarrow (x, y) = (4, 2) \text{ のとき、 } 12 = x^2 - y^2$$

である。

(ii) n は 4 の倍数であるから、 n を素因数分解すると

$p_1, p_2, \dots, p_k$ を相異なる奇素数として

$$n = 2^{i+2} p_1^{j_1} p_2^{j_2} \dots p_k^{j_k}$$

$$[i, j_1, j_2, \dots, j_k \text{ は非負整数}]$$

と表せる。2 つの偶数 n_α, n_β を

$$n_\alpha = 2^{i_\alpha+1} p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k} = 2\alpha$$

$$n_\beta = 2^{i_\beta+1} p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_k^{\beta_k} = 2\beta$$

[ただし、 $i_\alpha, i_\beta, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ は非負整数

$$i_\alpha + i_\beta = i, \alpha_1 + \beta_1 = j_1, \alpha_2 + \beta_2 = j_2, \dots, \alpha_k + \beta_k = j_k]$$

で $n_\alpha \geq n_\beta \geq 2 (\Leftrightarrow \alpha \geq \beta \geq 1)$ を満たすよう定めて、

$$x+y = n_\alpha = 2\alpha, x-y = n_\beta = 2\beta$$

とすると

$$x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$$

$$= n_\alpha n_\beta$$

$$= 2^{i_\alpha+i_\beta+2} p_1^{\alpha_1+\beta_1} p_2^{\alpha_2+\beta_2} \dots p_k^{\alpha_k+\beta_k}$$

$$= 2^{i+2} p_1^{j_1} p_2^{j_2} \dots p_k^{j_k}$$

$$= n$$

a, b を定数とする。

2 次方程式 $x^2 + ax + b = 0$ (…… ①) の解が α, β である。

すなわち

$$x^2 + ax + b = (x - \alpha)(x - \beta) \quad \dots\dots\dots ②$$

と因数分解できる。

(1)

$$\begin{aligned} & \int_{\alpha}^{\beta} (x^2 + ax + b) dx \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)\{(x - \alpha) + (\alpha - \beta)\} dx \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)^2 dx - (\beta - \alpha) \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha) dx \\ &= \left[\frac{1}{3}(x - \alpha)^3 \right]_{\alpha}^{\beta} - (\beta - \alpha) \left[\frac{1}{2}(x - \alpha)^2 \right]_{\alpha}^{\beta} \\ &= \frac{1}{3}(\beta - \alpha)^3 - \frac{1}{2}(\beta - \alpha)^3 \\ &= -\frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3 \end{aligned}$$

である。

(1) 点 O を原点とする座標平面上において、

行列 $A = \begin{pmatrix} 10 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 8 \end{pmatrix}$ で表される 1 次変換で

点 $P(\cos \theta, \sin \theta)$ が点 Q に移るから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ} &= A\overrightarrow{OP} \\ &= \begin{pmatrix} 10 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 10 \cos \theta + \sqrt{3} \sin \theta \\ \sqrt{3} \cos \theta + 8 \sin \theta \end{pmatrix}\end{aligned}$$

よって、点 Q の座標は $(10 \cos \theta + \sqrt{3} \sin \theta, \sqrt{3} \cos \theta + 8 \sin \theta)$ である。

(2)

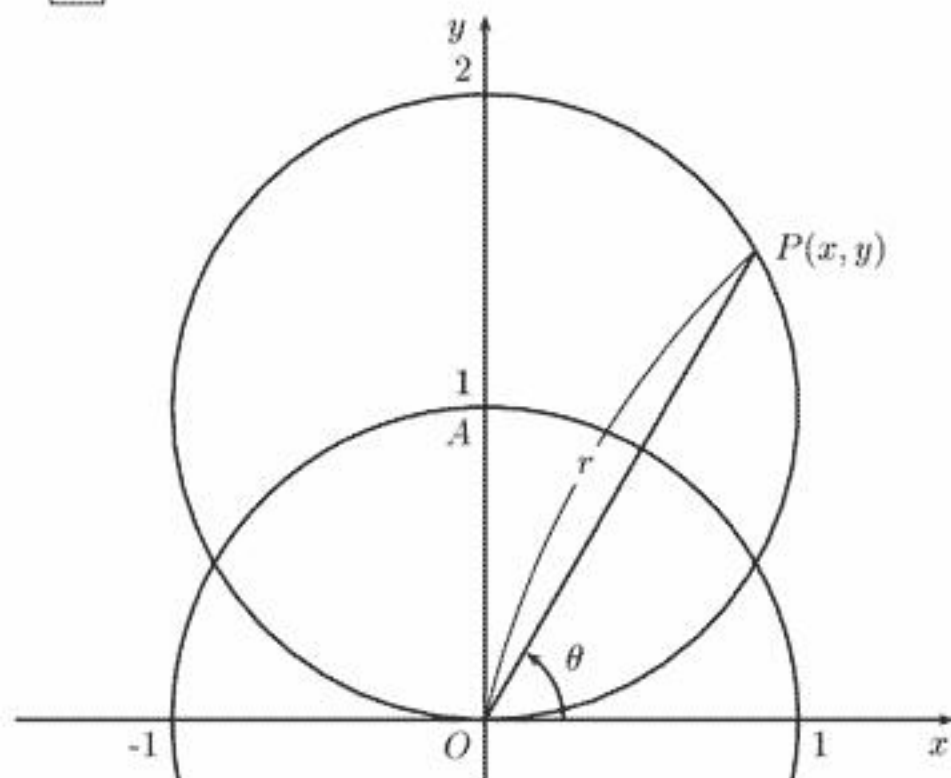
$$\begin{aligned}f(\theta) &= \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \cos \theta + \sqrt{3} \sin \theta \\ \sqrt{3} \cos \theta + 8 \sin \theta \end{pmatrix} \\ &= \cos \theta (10 \cos \theta + \sqrt{3} \sin \theta) + \sin \theta (\sqrt{3} \cos \theta + 8 \sin \theta) \\ &= 10 \cos^2 \theta + 2\sqrt{3} \sin \theta \cos \theta + 8 \sin^2 \theta \\ &= 10 \cdot \frac{1 + \cos 2\theta}{2} + \sqrt{3} \sin 2\theta + 8 \cdot \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \\ &= \sqrt{3} \sin 2\theta + \cos 2\theta + 9 \\ &= 2 \sin(2\theta + \alpha) + 9 \quad (\text{ただし } \alpha = \frac{\pi}{6})\end{aligned}$$

$0 \leq \theta \leq \pi$ より、 $2\theta + \alpha$ は $\alpha \leq 2\theta + \alpha \leq 2\pi + \alpha$ (区間の幅 2π) を満たすすべての値をとりうる。

したがって、 $f(\theta)$ は

$$\begin{cases} 2\theta + \alpha = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{6} \text{ のとき、最大値 } 11 \\ 2\theta + \alpha = \frac{3}{2}\pi \Leftrightarrow \theta = \frac{2}{3}\pi \text{ のとき、最小値 } 7 \end{cases}$$

をとる。



- (1) 座標平面上の原点 O が極、 x 軸の 0 以上の部分が始線である極座標を導入し、 θ を偏角として

点 P の直交座標を (x, y) 、極座標を (r, θ)

とくと

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \quad \dots\dots\dots ①$$

が成り立つ。点 P は中心 $A(0, 1)$ 、半径 1 の円

$$C: x^2 + (y - 1)^2 = 1 \quad \dots\dots\dots ②$$

上にあるから、①を②に代入して r と θ の関係式を得る。

$$r^2 \cos^2 \theta + (r \sin \theta - 1)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) - 2r \sin \theta = 0$$

$$\Leftrightarrow r(r - 2 \sin \theta) = 0$$

$$\Leftrightarrow r = 0 \text{ または } r = 2 \sin \theta$$

$r = 0$ は $r = 2 \sin \theta$ において $\theta = 0$ とすると得られるから
円 C の極方程式 $r = 2 \sin \theta$ (..... ③) が得られる。