

2008 年度

M 1

数 学

2 月 25 日(月)
【前 期 日 程】

教 育 学 部

理学部 (生物科学科, 地球科学科) 13:00 ~ 14:20

農 学 部

注 意 事 項

試験開始前

- 1 監督者の指示があるまで, 問題冊子, 解答用紙に手を触れないでください。
- 2 監督者の指示に従って, 全部の解答用紙 (4 枚) に受験番号を記入してください。

試験開始後

- 3 この問題冊子は, 4 ページあります。はじめに, 問題冊子, 解答用紙を確かめ, 枚数の不足や, 印刷の不鮮明なもの, ページの落丁・乱丁があった場合は, 手をあげて監督者に申し出てください。
- 4 解答は, すべて別紙解答用紙に記入してください。
- 5 解答スペースが不足するときは, 解答用紙の裏面も使用することが出来ます。ただし, その場合は, 表面に「裏へつづく」と明記してください。
- 6 問題は, 声を出して読むはいけません。
- 7 各問ごとの配点は, 比率 (%) で表示してあります。

試験終了後

- 8 問題冊子は, 必ず持ち帰ってください。

1

次の問いに答えよ。

- (1) 整数 x, y が $x > y \geq 0$ を満たすとき、 $x^2 - y^2$ は 4 の倍数または奇数であることを示せ。
- (2) n を自然数とする。
- (i) $n = 4, 8, 12$ のとき、 $n = x^2 - y^2$ を満たす整数 x, y ($x > y \geq 0$) をそれぞれ 1 組ずつ求めよ。
- (ii) n が 4 の倍数のとき、 $n = x^2 - y^2$ を満たす整数 x, y ($x > y \geq 0$) があることを示せ。
- (3) n を自然数とする。
- (i) $n = 3, 5, 7$ のとき、 $n = x^2 - y^2$ を満たす整数 x, y ($x > y \geq 0$) をそれぞれ 1 組ずつ求めよ。
- (ii) n が奇数のとき、 $n = x^2 - y^2$ を満たす整数 x, y ($x > y \geq 0$) があることを示せ。

(配点 25%)

2 a, b を有理数とし、2 次方程式 $x^2 + ax + b = 0$ は実数解 α, β ($\alpha < \beta$) をもつとする。 β が自然数 n を用いて $\beta = n + \sqrt{3}$ と表されているとする。次の問いに答えよ。

- (1) $b > 0$ となるための n が満たす条件を求めよ。
- (2) $b > 0$ とする。区間 $0 \leq x \leq \alpha$ において曲線 $y = x^2 + ax + b$ と x 軸とではさまれた図形の面積を S_1 とする。曲線 $y = x^2 + ax + b$ と x 軸で囲まれた図形の面積を S_2 とする。 $2S_1 = S_2$ となる n の値を求めよ。必要ならば、次の公式を用いてよい。

$$\int_{\alpha}^{\beta} (x^2 + ax + b) dx = -\frac{(\beta - \alpha)^3}{6}$$

(配点 25%)

3 座標平面上の原点を O とし、2本の半直線 OX, OY のなす角を $\frac{\pi}{3}$ とする。この角の二等分線上の点 P を中心とし、半径1の円が、半直線 OX とは2点 A_1, A_2 で交わり、半直線 OY とは2点 B_1, B_2 で交わるとする。ただし、 $0 < OA_1 = OB_1 < OA_2 = OB_2$ とする。 $\vec{a}$ を $\overrightarrow{OA_1}$ と同じ向きの単位ベクトルとし、実数 t_1, t_2 を用いて $\overrightarrow{OA_1} = t_1 \vec{a}$, $\overrightarrow{OA_2} = t_2 \vec{a}$ と表す。 $\vec{b}$ を $\overrightarrow{OB_1}$ と同じ向きの単位ベクトルとする。 $OP = x$ ($1 < x < 2$) として、次の問いに答えよ。

- (1) $\overrightarrow{OP} = \alpha(\vec{a} + \vec{b})$ を満たす α を x を用いて表せ。
- (2) $t_1 + t_2$ および $t_1 t_2$ をそれぞれ x を用いて表せ。
- (3) 線分 $A_1 B_2$ の長さを求めよ。
- (4) 線分 $A_1 B_2$ と $A_2 B_1$ の交点を Q とするとき、 $\overrightarrow{OQ} = \frac{t_1 t_2}{t_1 + t_2} (\vec{a} + \vec{b})$ を示せ。

(配点 25%)

4

a, n を自然数とし, $a \geq 2, n \geq 2$ とする。次の問いに答えよ。

(1) $\log_a 2$ が正の有理数になるとき, a の約数で素数となるものを求めよ。

(2) 次の和を求めよ。

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1) \cdot n}$$

(3) $S(a)$ を

$$S(a) = a^{\frac{1}{1 \cdot 2}} a^{\frac{1}{2 \cdot 3}} \cdots a^{\frac{1}{(n-1) \cdot n}}$$

とする。 $S(a) = 16$ となる a の値をすべて求めよ。

(配点 25%)