

2008 年度

M 2

数 学

2 月 25 日(月)
【前 期 日 程】

情 報 学 部 (情報科学科)
理学部 (物理学科, 化学科)
工 学 部

13 : 00 ~ 15 : 00

注 意 事 項

試験開始前

- 1 監督者の指示があるまで, 問題冊子, 解答用紙に手を触れないでください。
- 2 監督者の指示に従って, 全部の解答用紙(4 枚)に受験番号を記入してください。

試験開始後

- 3 この問題冊子は, 4 ページあります。はじめに, 問題冊子, 解答用紙を確かめ, 枚数の不足や, 印刷の不鮮明なもの, ページの落丁・乱丁があった場合は, 手をあげて監督者に申し出てください。
- 4 解答は, すべて別紙解答用紙に記入してください。
- 5 解答スペースが不足するときは, 解答用紙の裏面も使用することが出来ます。ただし, その場合は, 表面に「裏へつづく」と明記してください。
- 6 問題は, 声を出して読むはいけません。
- 7 各問ごとの配点は, 比率(%)で表示してあります。

試験終了後

- 8 問題冊子は, 必ず持ち帰ってください。

1 次の問いに答えよ。

- (1) 整数 x, y が $x > y \geq 0$ を満たすとき、 $x^2 - y^2$ は 4 の倍数または奇数であることを示せ。
- (2) n を自然数とする。
- (i) $n = 4, 8, 12$ のとき、 $n = x^2 - y^2$ を満たす整数 x, y ($x > y \geq 0$) をそれぞれ 1 組ずつ求めよ。
- (ii) n が 4 の倍数のとき、 $n = x^2 - y^2$ を満たす整数 x, y ($x > y \geq 0$) があることを示せ。
- (3) n を自然数とする。
- (i) $n = 3, 5, 7$ のとき、 $n = x^2 - y^2$ を満たす整数 x, y ($x > y \geq 0$) をそれぞれ 1 組ずつ求めよ。
- (ii) n が奇数のとき、 $n = x^2 - y^2$ を満たす整数 x, y ($x > y \geq 0$) があることを示せ。

(配点 25%)

- 2** a, b を定数とし、2 次方程式 $x^2 + ax + b = 0$ は実数解 α, β ($\alpha < \beta$) をもつとする。次の問いに答えよ。

(1) 次の等式を証明せよ。

$$\int_{\alpha}^{\beta} (x^2 + ax + b) dx = -\frac{(\beta - \alpha)^3}{6}$$

(2) a, b を有理数とし、 β が自然数 n を用いて $\beta = n + \sqrt{3}$ と表されているとする。

(i) $b > 0$ となるための n が満たす条件を求めよ。

(ii) $b > 0$ とする。区間 $0 \leq x \leq \alpha$ において曲線 $y = x^2 + ax + b$ と x 軸とではさまれた図形の面積を S_1 とする。曲線 $y = x^2 + ax + b$ と x 軸で囲まれた図形の面積を S_2 とする。 $2S_1 = S_2$ となる n の値を求めよ。

(配点 25%)

3

点 O を原点とする座標平面上において、行列 $A = \begin{pmatrix} 10 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 8 \end{pmatrix}$ で表される移動で点 $P(\cos \theta, \sin \theta)$ を移した点を Q とする。次の問いに答えよ。

(1) 点 Q の座標を θ を用いて表せ。

(2) 内積 $\overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{OP}$ を θ の関数として表し、 $f(\theta)$ とおく。 $f(\theta)$ の区間 $0 \leq \theta \leq \pi$ における最大値および最小値を求めよ。

(3) (2) で求めた $f(\theta)$ の最大値を与える θ を θ_1 とし、最小値を与える θ を θ_2 とする。

(i) 点 P_1, P_2 を $P_1(\cos \theta_1, \sin \theta_1), P_2(\cos \theta_2, \sin \theta_2)$ とするとき、2 つのベクトル $\overrightarrow{OP_1}$ と $\overrightarrow{OP_2}$ のなす角を求めよ。

(ii) 行列 U を $U = \begin{pmatrix} \cos \theta_1 & \cos \theta_2 \\ \sin \theta_1 & \sin \theta_2 \end{pmatrix}$ とするとき、 $U^{-1}AU$ を求めよ。

(配点 25%)

4 n を自然数とする。次の問いに答えよ。

(1) 次の 2 つの等式を証明せよ。

$$(1 + 2 \cos 2x + 2 \cos 4x + \cdots + 2 \cos 2nx) \sin x = \sin(2n + 1)x$$

$$\{\sin x + \sin 3x + \sin 5x + \cdots + \sin(2n - 1)x\} \sin x = \sin^2 nx$$

(2) 次の極限値を求めよ。

$$\lim_{a \rightarrow +0} \int_a^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n + 1)x}{\sin x} dx$$

(3) 次の極限値を求めよ。

$$\lim_{a \rightarrow +0} \int_a^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 nx}{\sin^2 x} dx$$

(配点 25%)