

2008 年度

M 3

数 学

2 月 25 日(月)

理 学 部 (数 学 科)

13:00 ~ 15:00

【前 期 日 程】

注 意 事 項

試験開始前

- 1 監督者の指示があるまで、問題冊子、解答用紙に手を触れないでください。
- 2 監督者の指示に従って、全部の解答用紙(4 枚)に受験番号を記入してください。

試験開始後

- 3 この問題冊子は、4 ページあります。はじめに、問題冊子、解答用紙を確かめ、枚数の不足や、印刷の不鮮明なもの、ページの落丁・乱丁があった場合は、手をあげて監督者に申し出てください。
- 4 解答は、すべて別紙解答用紙に記入してください。
- 5 解答スペースが不足するときは、解答用紙の裏面も使用することが出来ます。ただし、その場合は、表面に「裏へつづく」と明記してください。
- 6 問題は、声を出して読むはいけません。
- 7 各問ごとの配点は、比率(%)で表示してあります。

試験終了後

- 8 問題冊子は、必ず持ち帰ってください。

1 次の問いに答えよ。

- (1) 整数 x, y が $x > y \geq 0$ を満たすとき、 $x^2 - y^2$ は 4 の倍数または奇数であることを示せ。
- (2) n を自然数とする。
- (i) $n = 4, 8, 12$ のとき、 $n = x^2 - y^2$ を満たす整数 x, y ($x > y \geq 0$) をそれぞれ 1 組ずつ求めよ。
- (ii) n が 4 の倍数のとき、 $n = x^2 - y^2$ を満たす整数 x, y ($x > y \geq 0$) があることを示せ。
- (3) n を自然数とする。
- (i) $n = 3, 5, 7$ のとき、 $n = x^2 - y^2$ を満たす整数 x, y ($x > y \geq 0$) をそれぞれ 1 組ずつ求めよ。
- (ii) n が奇数のとき、 $n = x^2 - y^2$ を満たす整数 x, y ($x > y \geq 0$) があることを示せ。

(配点 25 %)

- 2** a, b を定数とし, 2 次方程式 $x^2 + ax + b = 0$ は実数解 α, β ($\alpha < \beta$) をもつとする。次の問いに答えよ。

(1) 次の等式を証明せよ。

$$\int_{\alpha}^{\beta} (x^2 + ax + b) dx = -\frac{(\beta - \alpha)^3}{6}$$

(2) a, b を有理数とし, β が自然数 n を用いて $\beta = n + \sqrt{3}$ と表されているとする。

(i) $b > 0$ となるための n が満たす条件を求めよ。

(ii) $b > 0$ とする。区間 $0 \leq x \leq \alpha$ において曲線 $y = x^2 + ax + b$ と x 軸とではさまれた図形の面積を S_1 とする。曲線 $y = x^2 + ax + b$ と x 軸で囲まれた図形の面積を S_2 とする。 $2S_1 = S_2$ となる n の値を求めよ。

(配点 25%)

3 点 O を原点とする座標平面上において、行列 $A = \begin{pmatrix} 10 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 8 \end{pmatrix}$ で表される移動

で点 $P(\cos \theta, \sin \theta)$ を移した点を Q とする。次の問いに答えよ。

(1) 点 Q の座標を θ を用いて表せ。

(2) 内積 $\overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{OP}$ を θ の関数として表し、 $f(\theta)$ とおく。 $f(\theta)$ の区間 $0 \leq \theta \leq \pi$ における最大値および最小値を求めよ。

(3) (2) で求めた $f(\theta)$ の最大値を与える θ を θ_1 とし、最小値を与える θ を θ_2 とする。

(i) 点 P_1, P_2 を $P_1(\cos \theta_1, \sin \theta_1), P_2(\cos \theta_2, \sin \theta_2)$ とするとき、2つのベクトル $\overrightarrow{OP_1}$ と $\overrightarrow{OP_2}$ のなす角を求めよ。

(ii) 行列 U を $U = \begin{pmatrix} \cos \theta_1 & \cos \theta_2 \\ \sin \theta_1 & \sin \theta_2 \end{pmatrix}$ とするとき、 $U^{-1}AU$ を求めよ。

(配点 25%)

4 座標平面上で、中心が $(0, 1)$ 、半径 1 の円を C とする。 n を自然数とし、 $k = 0, 1, 2, \dots, n$ に対して、原点 O と点 $\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k}{2n}\pi\right), \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k}{2n}\pi\right)\right)$ を通る直線と C との交点のうち、原点と異なる点を P_k とする。 $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ に対して、線分 $P_k P_{k+1}$ の長さを ℓ_k とし、 $\triangle OP_k P_{k+1}$ の面積を S_k とする。次の問いに答えよ。

- (1) $k = 0, 1, 2, \dots, n$ に対して、線分 OP_k の長さを求めよ。
- (2) $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ に対して、 ℓ_k および S_k が次の式で与えられることを示せ。

$$\ell_k = 2 \sin \frac{\pi}{2n}$$

$$S_k = \sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k}{2n}\pi\right) \sin \frac{\pi}{n} + \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k}{2n}\pi\right) \sin^2 \frac{\pi}{2n}$$

- (3) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \ell_k$ を求めよ。

- (4) 次の等式を示し、さらに、右辺の値を求めよ。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} S_k = 2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \sin^2 \theta d\theta$$

(配点 25%)