(1) 数学的帰納法で証明する.

(i) $n=1$のとき, $4^{n+1}+5^{2n-1}=4^2+5^1=21$より成り立つ.

(ii) $n=k$のとき成り立つと仮定する. $4^{k+1}+5^{2k-1}=21M$ (Mは自然数)とおける.

$$
\begin{aligned}
4^{(k+1)+1}+5^{2(k+1)-1} &= 4^{k+2}+5^{2k+1} \\
&= 4(4^{k+1}+5^{2k-1})+21\cdot 5^{2k-1} \\
&= 21(4M+5^{2k-1})
\end{aligned}
$$

よって, $n=k+1$のときも成り立つ.

(i)(ii)よりすべての自然数nに対して, $4^{n+1}+5^{2n-1}$は21で割り切れる. (証明終)

(2) 定数でない多項式$f(x)$は(b)で$n=1$としたときのx^2+x+1を割り切る.

x^2+x+1は実数係数の範囲でこれ以上因数分解できないから,

$f(x)$はx^2+x+1の定数倍であり, (a)から$f(x)=x^2+x+1$と推定する.

数学的帰納法で証明する.

(i) $n=1$のとき, 上記より成り立つ.

(ii) $n=k$のとき成り立つと仮定する. $x^{k+1}+(x+1)^{2k-1}=(x^2+x+1)Q(x)$

($Q(x)$はxの多項式)とおける.

$$
\begin{aligned}
x^{(k+1)+1}+(x+1)^{2(k+1)-1} &= x^{k+2}+(x+1)^{2k+1} \\
&= x\{x^{k+1}+(x+1)^{2k-1}\}+(x^2+x+1)(x+1)^{2k-1} \\
&= (x^2+x+1)\{xQ(x)+(x+1)^{2k-1}\}
\end{aligned}
$$

よって, $n=k+1$のときも成り立つ.

(i)(ii)よりすべての自然数nに対して, $x^{n+1}+(x+1)^{2n-1}$は$f(x)$で割り切れる.

(証明終)

平行移動しても面積は変化しないから，Cの頂点$\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$を原点にくるように

x軸方向に$-\frac{1}{2}$，y軸方向に$\frac{1}{4}$平行移動する．

$C: y=x^2-x \longrightarrow C': y=x^2$

$A(\alpha, \alpha^2-\alpha) \longrightarrow A'\left(\alpha-\frac{1}{2}, \left(\alpha-\frac{1}{2}\right)^2\right)$

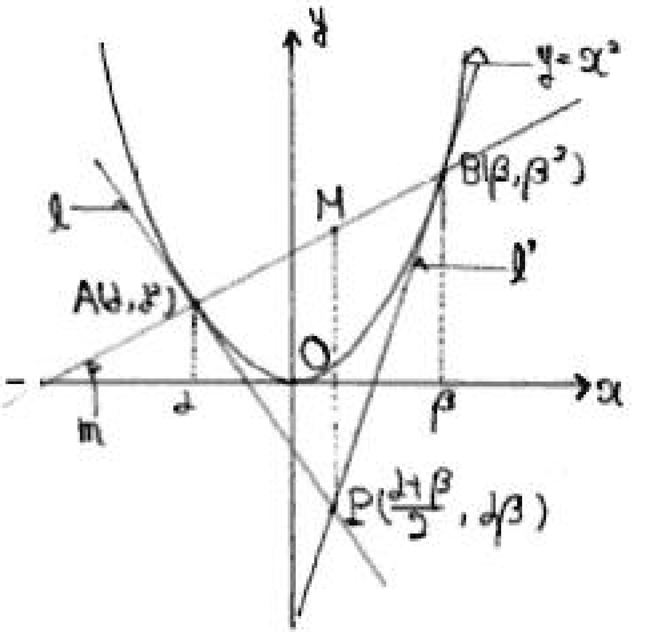
$B(\beta, \beta^2-\alpha) \longrightarrow B'\left(\beta-\frac{1}{2}, \left(\beta-\frac{1}{2}\right)^2\right)$

$y=x^2-x-k \longrightarrow y=x^2-k$

$\alpha-\frac{1}{2}=\alpha'$，$\beta-\frac{1}{2}=\beta'$として，'つきで考えればよい．

（以下，表記を簡単にするため，'をつけない．最後に$\alpha\to\alpha-\frac{1}{2}$，$\beta\to\beta-\frac{1}{2}$とすればよい．）

(1)



l, l'の方程式はそれぞれ

$l: y=2\alpha x-\alpha^2$

$l': y=2\beta x-\beta^2$

よって，交点Pの座標は$\left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \alpha\beta\right)$

直線ABをm，mと直線$x=\frac{\alpha+\beta}{2}$の交点をM

Mは線分ABの中点で，座標は$\left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \frac{\alpha^2+\beta^2}{2}\right)$

mの方程式 $m: y=(\alpha+\beta)x-\alpha\beta$

$$
\begin{aligned}
S &= \triangle PAB - \text{図形}AOB \\
&= \frac{1}{2}(\beta-\alpha)\left(\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}-\alpha\beta\right) - \int_\alpha^\beta \{(\alpha+\beta)x-\alpha\beta-x^2\}dx \\
&= \frac{1}{4}(\beta-\alpha)^3 + \int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx \\
&= \frac{1}{4}(\beta-\alpha)^3 - \frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3 = \frac{1}{12}(\beta-\alpha)^3
\end{aligned}
$$

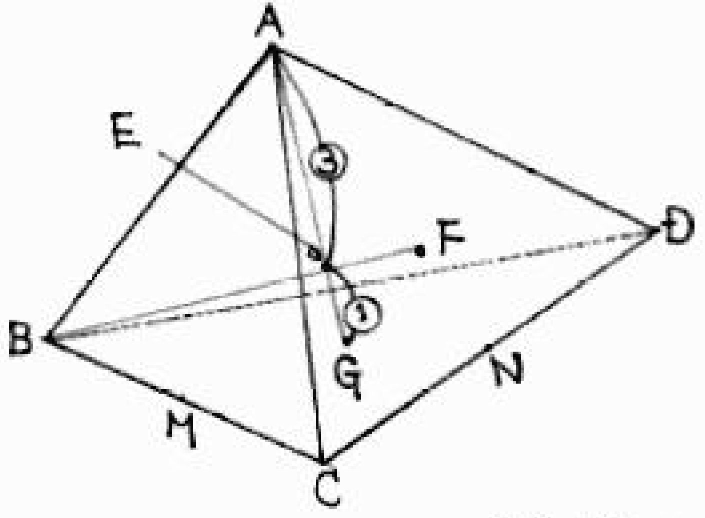
$\alpha\to\alpha-\frac{1}{2}$，$\beta\to\beta-\frac{1}{2}$と置き換えて，$S=\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^3$ —（答）

(2) $P\left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \alpha\beta\right)$が$y=x^2-k$上にあるから

$$\alpha\beta = \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2-k$$

$$\therefore\ k=\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^2=\frac{1}{4}(\beta-\alpha)^2$$

$$\therefore\ S=\frac{1}{12}\{(\beta-\alpha)^2\}^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{12}(4k)^{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}k^{\frac{3}{2}}$$ —（答）



以下，点Aに関する位置ベクトルを，$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$のように小文字で表す．

(1) 線分BCの中点をMとしたとき，△BCDの重心Gは中線DMを2：1に内分した点である．

$$\vec{m}=\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}$$

$$\therefore \vec{g}=\frac{2\vec{m}+\vec{d}}{3}=\frac{\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{3}$$ すなわち $$\overrightarrow{AG}=\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}}{3}$$ ……(答)

(2)［解法1］

$$\vec{e}=\frac{3}{4}\vec{g}=\frac{\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{4}$$

$$\overrightarrow{BE}=\vec{e}-\vec{b}=\frac{-3\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{4}$$

$\overrightarrow{BF'}=\frac{4}{3}\overrightarrow{BE}$ となる点F'をとると

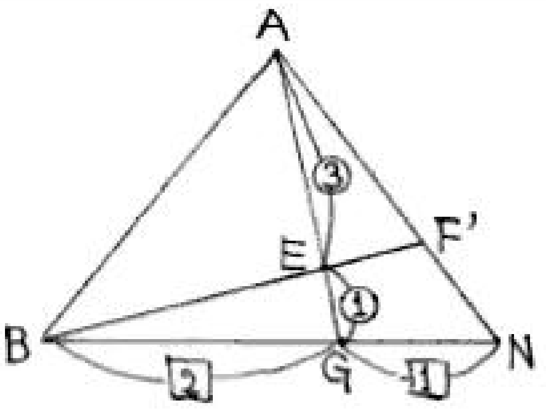
$$\overrightarrow{AF'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF'}=\vec{b}+\frac{4}{3}\cdot\frac{-3\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{4}=\frac{\vec{c}+\vec{d}}{3}=\vec{f}$$

これは，点F'が△ACDの重心Fに一致することを示す．よって，示された．

［解法2］

直線BEと平面ACDの交点をF'とする．

点A, B, N, G, E, F'は同じ平面上にある．



△AGNと直線BF'に関して，メネラウスの定理より

$$\frac{AF'}{F'N}\cdot\frac{NB}{BG}\cdot\frac{GE}{EA}=1$$

$$\frac{AF'}{F'N}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3}=1 \quad \therefore \frac{AF'}{F'N}=2$$

すなわち，点F'は中線ANを2：1に内分する点，△ACDの重心Fに一致する．

△BNFと直線AGに関して，メネラウスの定理より

$$\frac{BE}{EF}\cdot\frac{FA}{AN}\cdot\frac{NG}{GB}=1$$

$$\frac{BE}{EF}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=1 \quad \therefore \frac{BE}{EF}=3$$

すなわち，点Eは線分BFを3：1に内分する点である．（証明終）

(3)

$$\begin{aligned} BA=BD &\Leftrightarrow |-\vec{b}|=|\vec{d}-\vec{b}| \\ &\Leftrightarrow |\vec{b}|^2=|\vec{d}-\vec{b}|^2 \\ &\Leftrightarrow |\vec{b}|^2=|\vec{d}|^2-2\vec{b}\cdot\vec{d}+|\vec{b}|^2 \\ &\Leftrightarrow \vec{b}\cdot\vec{d}=\frac{1}{2}|\vec{d}|^2 \end{aligned}$$

同様にして

$$\begin{aligned} CA=CD &\Leftrightarrow |-\vec{c}|=|\vec{d}-\vec{c}| \\ &\Leftrightarrow \vec{c}\cdot\vec{d}=\frac{1}{2}|\vec{d}|^2 \end{aligned}$$

このとき，

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{AD} &= (\vec{f}-\vec{b})\cdot\vec{d} \\ &= \left(\frac{\vec{c}+\vec{d}}{3}-\vec{b}\right)\cdot\vec{d} \\ &= \frac{1}{3}\left(\vec{c}\cdot\vec{d}+|\vec{d}|^2-3\vec{b}\cdot\vec{d}\right) \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}|\vec{d}|^2+|\vec{d}|^2-\frac{3}{2}|\vec{d}|^2\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$\overrightarrow{BF}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{AD}\neq\vec{0}$ であるから，$\overrightarrow{BF}\perp\overrightarrow{AD}$ である．（証明終）

(1) AとBの対戦において，Aの目がα，Bの目がβ ($\alpha, \beta = 1,2,3,4,5,6$) という事象を
(α, β)と記す．A.Bの試行は独立で，各目が出る確率は$\frac{1}{6}$であるから，

$$P((\alpha,\beta)) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

引き分けになるのは，

$$(\alpha,\beta) = (k,k) \quad (k = 1,2,3,4,5,6)$$

の場合で，その確率は$\frac{1}{36} \times 6 = \frac{1}{6}$である．　……(答)

ある2つの目α,βに対して，Aが$\alpha(\beta)$を出す確率とBが$\alpha(\beta)$を出す確率は$\frac{1}{6}$で等しいから，
AがBに勝つ(α,β)とAがBに負ける(β,α)は常に対で現れ，それらの確率は等しい．
よって，Aが勝つ確率とBが勝つ確率は等しく，$\frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{6}\right) = \frac{5}{12}$である．　……(答)

(2) X, Yをそれぞれ AとB, AとCの対戦におけるAの得点を表す確率変数とする．

X	x_1	x_2	x_3
P	p_1	p_2	p_3

Y	y_1	y_2	y_3
P	q_1	q_2	q_3

ただし，$x_1 = y_1 = 3,\ x_2 = y_2 = 0,\ x_3 = y_3 = 1$

$$p_1 = q_1 = \frac{5}{12},\ p_2 = q_2 = \frac{5}{12},\ p_3 = q_3 = \frac{1}{6}$$

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1,\ q_1 + q_2 + q_3 = 1$$

である．

$P(X = x_i, Y = y_j) = r_{ij}$ とおく．$r_{ij} = p_i q_j$ である．

$X \backslash Y$	y_1	y_2	y_3	$\sum_{j=1}^{3} r_{ij}$
x_1	r_{11}	r_{12}	r_{13}	p_1
x_2	r_{21}	r_{22}	r_{23}	p_2
x_3	r_{31}	r_{32}	r_{33}	p_3
$\sum_{i=1}^{3} r_{ij}$	q_1	q_2	q_3	1

$$p_i = \sum_{j=1}^{3} r_{ij},\ q_j = \sum_{i=1}^{3} r_{ij}$$

したがって，求めるAの総得点の期待値$E(X+Y)$は

$$\begin{aligned}
E(X+Y) &= \sum_{i=1}^{3}\left\{\sum_{j=1}^{3}(x_i + y_j) r_{ij}\right\} = \sum_{i=1}^{3}\left(\sum_{j=1}^{3} x_i r_{ij}\right) + \sum_{i=1}^{3}\left(\sum_{j=1}^{3} y_j r_{ij}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{3}\left(\sum_{j=1}^{3} x_i r_{ij}\right) + \sum_{j=1}^{3}\left(\sum_{i=1}^{3} y_j r_{ij}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{3}\left(x_i \sum_{j=1}^{3} r_{ij}\right) + \sum_{j=1}^{3}\left(y_j \sum_{i=1}^{3} r_{ij}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{3} x_i p_i + \sum_{j=1}^{3} y_j q_j = E(X) + E(Y).
\end{aligned}$$

$$E(X) = E(Y) = 3 \times \frac{5}{12} + 0 \times \frac{5}{12} + 1 \times \frac{1}{6} = \frac{17}{12}$$

ゆえに，$E(X+Y) = \frac{17}{12} \times 2 = \frac{17}{6}$　……(答)

(3). (AとBの対戦の勝者，AとCの対戦の勝者，BとCの対戦の勝者)
の組でこの総当たり戦の結果を表す．ただし，引き分けは△と記す．
Aの総得点がB, Cのそれぞれの総得点より多くなるのは，次の場合である．

(i) 2勝 (6点) (A, A, ＊) (＊：任意)　$\longrightarrow \left(\frac{5}{12}\right)^2$

(ii) 1勝1分 (4点)

(A, △, B or △)
(△, A, C or △)
$\longrightarrow \left\{\frac{5}{12} \times \frac{1}{6} \times \left(1 - \frac{5}{12}\right)\right\} \times 2$

[1勝1敗 (3点)，2分 (2点)，1敗1分 (1点) だと，B, Cのどちらかがそれぞれ
3点，2点，4点以上となり適さない．]

したがって，求める確率は

$$\left(\frac{5}{12}\right)^2 + \frac{5}{12} \times \frac{1}{6} \times \frac{7}{12} \times 2 = \frac{5}{12} \times \left\{\frac{5}{12} + \frac{7}{36}\right\}$$

$$= \frac{5}{12} \times \frac{11}{18} = \frac{55}{216}$$　……(答)

[別解] (上と同様な表記をとる．)

各対戦において，ゲームの規則は同じであるから

(iA) Aの総得点がB, Cそれぞれの総得点より多い．
(iB) Bの総得点がC, Aそれぞれの総得点より多い．
(iC) Cの総得点がA, Bそれぞれの総得点より多い．

とすると，(iA), (iB), (iC) それぞれの確率は等しい．
これをpとおく．(i)の余事象は

(iiA) $A < B = C \Leftrightarrow$ (B, C, △)
(iiB) $B < C = A \Leftrightarrow$ (A, △, C)
(iiC) $C < A = B \Leftrightarrow$ (△, A, B)
$\rightarrow \left(\frac{5}{12}\right)^2 \times \frac{1}{6} \times 3$

A = B = C で，Aの勝敗が

(1勝1敗) (iiiB) (A, C, B)
(iiiC) (B, A, C)
$\rightarrow \left(\frac{5}{12}\right)^3 \times 2$

(2分) (iv) (△, △, △)　$\rightarrow \left(\frac{1}{6}\right)^3$

の和事象であるから

$$\begin{aligned}
1 - 3p &= \left(\frac{5}{12}\right)^2 \times \frac{1}{6} \times 3 + \left(\frac{5}{12}\right)^3 \times 2 + \left(\frac{1}{6}\right)^3 \\
&= \left(\frac{5}{12}\right)^2 \times \left(\frac{1}{2} + \frac{5}{6}\right) + \left(\frac{1}{6}\right)^3 \\
&= \frac{5}{12} \times \frac{5}{12} \times \frac{4}{3} + \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{25}{108} + \frac{1}{216} \\
&= \frac{51}{216} = \frac{17}{72}
\end{aligned}$$

$$\therefore p = \frac{1}{3} \times \left(1 - \frac{17}{72}\right) = \frac{55}{216}$$　……(答)