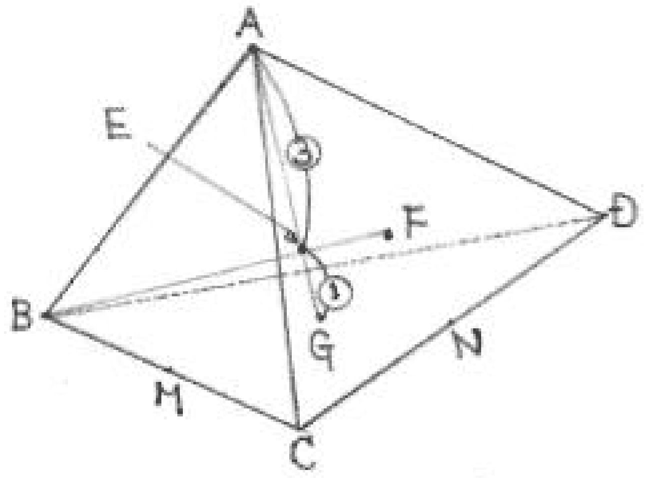


以下，点Aに関する位置ベクトルを，$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$ のように1文字で表す。

(1) 線分BCの中点をMとしたとき，△BCDの重心Gは中線DMを2：1に内分した点である。

$$\vec{m}=\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}$$

$$\therefore \vec{g}=\frac{2\vec{m}+\vec{d}}{3}=\frac{\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{3}$$ すなわち $\overrightarrow{AG}=\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}}{3}$ ……(答)

(2) [解法1]

$$\vec{e}=\frac{3}{4}\vec{g}=\frac{\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{4}$$

$$\overrightarrow{BE}=\vec{e}-\vec{b}=\frac{-3\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{4}$$

$\overrightarrow{BF'}=\frac{4}{3}\overrightarrow{BE}$ となる点F'をとると

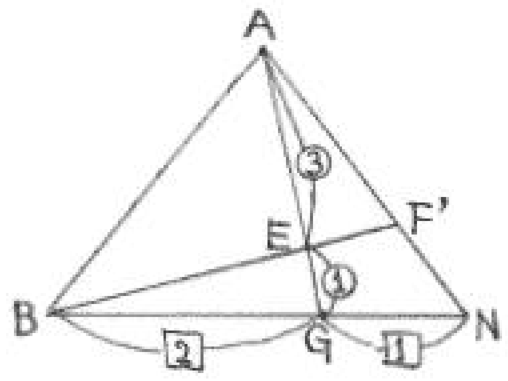
$$\overrightarrow{AF'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF'}=\vec{b}+\frac{4}{3}\cdot\frac{-3\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{4}=\frac{\vec{c}+\vec{d}}{3}=\vec{f}$$

これは，点F'が△ACDの重心Fに一致することを示す。よって，示された。

[解法2]

直線BEと平面ACDの交点をF'とする。

点A, B, N, G, E, F'は同じ平面上にある。



△AGNと直線BF'に関して，メネラウスの定理より

$$\frac{AF'}{F'N}\cdot\frac{NB}{BG}\cdot\frac{GE}{EA}=1$$

$$\frac{AF'}{F'N}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3}=1 \quad \therefore \frac{AF'}{F'N}=2$$

すなわち，点F'は中線ANを2：1に内分する点，△ACDの重心Fに一致する。

△BNFと直線AGに関して，メネラウスの定理より

$$\frac{BE}{EF}\cdot\frac{FA}{AN}\cdot\frac{NG}{GB}=1$$

$$\frac{BE}{EF}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=1 \quad \therefore \frac{BE}{EF}=3$$

すなわち，点Eは線分BFを3：1に内分する点である。(証明終)

(3)

$$\begin{aligned} BA=BD &\Leftrightarrow |-\vec{b}|=|\vec{d}-\vec{b}| \\ &\Leftrightarrow |\vec{b}|^2=|\vec{d}-\vec{b}|^2 \\ &\Leftrightarrow |\vec{b}|^2=|\vec{d}|^2-2\vec{b}\cdot\vec{d}+|\vec{b}|^2 \\ &\Leftrightarrow \vec{b}\cdot\vec{d}=\frac{1}{2}|\vec{d}|^2 \end{aligned}$$

同様にして

$$\begin{aligned} CA=CD &\Leftrightarrow |-\vec{c}|=|\vec{d}-\vec{c}| \\ &\Leftrightarrow \vec{c}\cdot\vec{d}=\frac{1}{2}|\vec{d}|^2 \end{aligned}$$

このとき，

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{AD} &= (\vec{f}-\vec{b})\cdot\vec{d} \\ &= \left(\frac{\vec{c}+\vec{d}}{3}-\vec{b}\right)\cdot\vec{d} \\ &= \frac{1}{3}\left(\vec{c}\cdot\vec{d}+|\vec{d}|^2-3\vec{b}\cdot\vec{d}\right) \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}|\vec{d}|^2+|\vec{d}|^2-\frac{3}{2}|\vec{d}|^2\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$\overrightarrow{BF}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{AD}\neq\vec{0}$ であるから，$\overrightarrow{BF}\perp\overrightarrow{AD}$ である。(証明終)

平行移動しても面積は変化しないから，Cの頂点$\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$を原点にくるように

x軸方向に$-\frac{1}{2}$，y軸方向に$\frac{1}{4}$平行移動する．

$$C: y=x^2-x \longrightarrow C': y=x^2$$

$$A(\alpha, \alpha^2-\alpha) \longrightarrow A'\left(\alpha-\frac{1}{2}, \left(\alpha-\frac{1}{2}\right)^2\right)$$

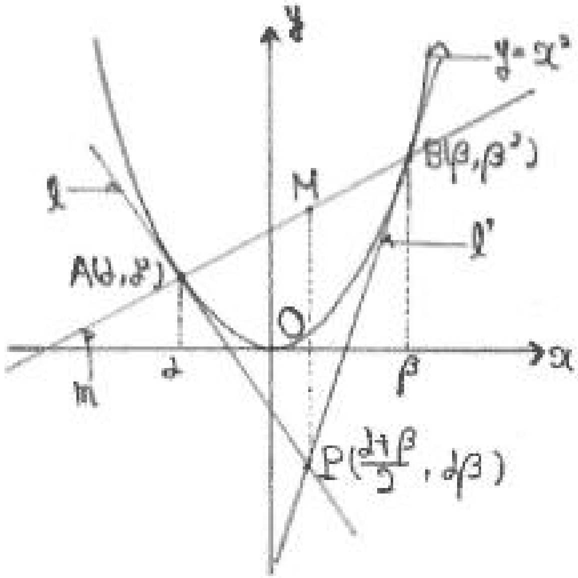
$$B(\beta, \beta^2-\alpha) \longrightarrow B'\left(\beta-\frac{1}{2}, \left(\beta-\frac{1}{2}\right)^2\right)$$

$$y=x^2-x-k \longrightarrow y=x^2-k$$

$\alpha-\frac{1}{2}=\alpha'$，$\beta-\frac{1}{2}=\beta'$として，'つきで考えればよい．

（以下，表記を簡単にするため，'をつけない．最後に$\alpha\to\alpha-\frac{1}{2}$，$\beta\to\beta-\frac{1}{2}$とすればよい．）

(1)



l，l'の方程式はそれぞれ

$l: y=2\alpha x-\alpha^2$

$l': y=2\beta x-\beta^2$

よって，交点Pの座標は$\left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \alpha\beta\right)$

直線ABをm，mと直線$x=\frac{\alpha+\beta}{2}$の交点をM

Mは線分ABの中点で，座標は$\left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \frac{\alpha^2+\beta^2}{2}\right)$

mの方程式 $m: y=(\alpha+\beta)x-\alpha\beta$

$$\begin{aligned}
S &= \triangle PAB - \text{図形AOB} \\
&= \frac{1}{2}(\beta-\alpha)\left(\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}-\alpha\beta\right) - \int_\alpha^\beta \{(\alpha+\beta)x-\alpha\beta-x^2\}dx \\
&= \frac{1}{4}(\beta-\alpha)^3 + \int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx \\
&= \frac{1}{4}(\beta-\alpha)^3 - \frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3 = \frac{1}{12}(\beta-\alpha)^3
\end{aligned}$$

$\alpha\to\alpha-\frac{1}{2}$，$\beta\to\beta-\frac{1}{2}$と置き換えて，$S=\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^3$ ……（答）

(2) $P\left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \alpha\beta\right)$が$y=x^2-k$上にあるから

$$\alpha\beta=\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2-k$$

$$\therefore k=\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^2=\frac{1}{4}(\beta-\alpha)^2$$

$$\therefore S=\frac{1}{12}\{(\beta-\alpha)^2\}^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{12}(4k)^{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}k^{\frac{3}{2}}$$ —（答）

(1) (凹凸は特に指定されなければ考えなくてもよいが，グラフをきちんと描きたいので
ここでは考えることにする.)

$$f_n(x)=\frac{2nx}{x^2+n^2}\quad(x\geqq 0)$$

$$f_n'(x)=\frac{2n}{(x^2+n^2)^2}\{1\cdot(x^2+n^2)-x\cdot 2x\}$$

$$=\frac{2n}{(x^2+n^2)^2}(n^2-x^2)=\frac{2n}{(x^2+n^2)^2}(n+x)(n-x)$$

$$f_n''(x)=2n\{(-2)(x^2+n^2)^{-3}(2x)(n^2-x^2)+(x^2+n^2)^{-2}(-2x)\}$$

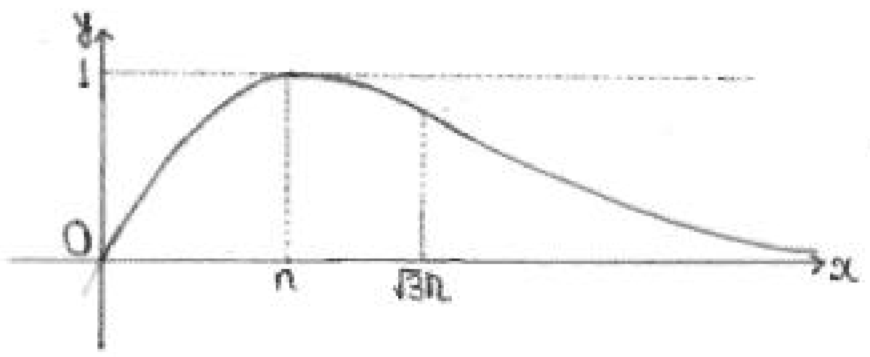
$$=\frac{-4nx}{(x^2+n^2)^3}(3n^2-x^2)=-\frac{4nx}{(x^2+n^2)^3}(\sqrt{3}n+x)(\sqrt{3}n-x)$$

x	0		n		$\sqrt{3}n$	
$f'(x)$		$+$	0		$-$	
$f''(x)$	0		$-$		0	$+$
$f(x)$	0	↗	1	↘	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	↘
			(極大)		(変曲点)	

$f(0)=0$, $f(n)=1$, $f(\sqrt{3}n)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

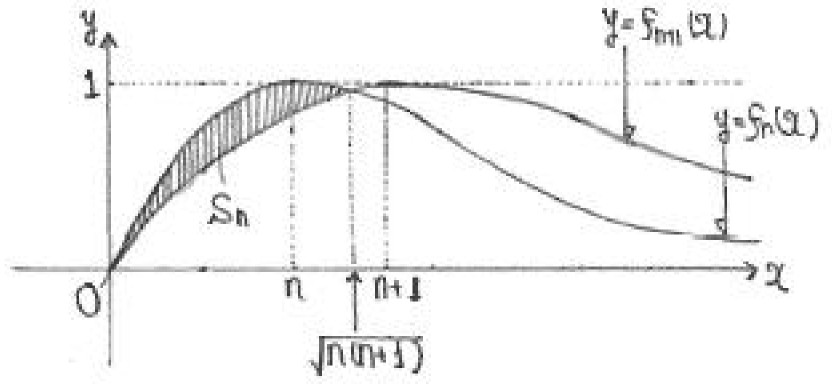
$$\lim_{x\to\infty}f_n(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{2n\cdot\frac{1}{x}}{1+\frac{n^2}{x^2}}=0$$

$f'(0)=\frac{2}{n}$



…(答)

(2)



$f_n(x)\gtreqless f_{n+1}(x)$

$$\frac{2nx}{x^2+n^2}\gtreqless\frac{2(n+1)x}{x^2+(n+1)^2}$$

$2x\cdot n\{x^2+(n+1)^2\}\gtreqless 2x\cdot(n+1)(x^2+n^2)$

$2x\{n(n+1)-x^2\}\gtreqless 0$

(複号同順)

$f_n(x)=f_{n+1}(x)$を解くと，$x=0,\ \pm\sqrt{n(n+1)}$

2曲線 $y=f_n(x)$, $y=f_{n+1}(x)$は上の図のようになる.

$$\int f_n(x)\,dx=n\log(x^2+n^2)+C$$

(Cは積分定数)

$$S_n=\int_0^{\sqrt{n(n+1)}}\{f_n(x)-f_{n+1}(x)\}dx$$

$$=\Big[n\log(x^2+n^2)-(n+1)\log\{x^2+(n+1)^2\}\Big]_0^{\sqrt{n(n+1)}}$$

$$=n\log\{n(2n+1)\}-(n+1)\log\{(n+1)(2n+1)\}-n\log n^2+(n+1)\log(n+1)^2$$

$$=n\{\log n+\log(2n+1)\}-(n+1)\{\log(n+1)+\log(2n+1)\}$$
$$-2n\log n+2(n+1)\log(n+1)$$

$$=(n+1)\log(n+1)-n\log n-\log(2n+1)$$ …(答)

(3) $S_n=(n+1)\log(n+1)-n\log n-\log(2n+1)$

$$=n\{\log(n+1)-\log n\}-\{\log(2n+1)-\log(n+1)\}$$

$$=n\log\left(1+\frac{1}{n}\right)-\log\frac{2n+1}{n+1}$$

$$=\log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-\log\frac{2+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}$$

関数 $y=\log x$ は連続，

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}=2$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\log e-\log 2=1-\log 2$$ …(答)

$$A=\begin{pmatrix}-1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & -1\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}\cos\frac{2}{3}\pi & -\sin\frac{2}{3}\pi\\ \sin\frac{2}{3}\pi & \cos\frac{2}{3}\pi\end{pmatrix}$$

(1) $R(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ とおくと，$\{R(\theta)\}^n=R(n\theta)$ である．

$$A^2=2^2\begin{pmatrix}\cos\frac{4}{3}\pi & -\sin\frac{4}{3}\pi\\ \sin\frac{4}{3}\pi & \cos\frac{4}{3}\pi\end{pmatrix}=4\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 2\sqrt{3}\\ -2\sqrt{3} & -2\end{pmatrix}$$

$$A^3=2^3R(2\pi)=8E=\begin{pmatrix}8 & 0\\ 0 & 8\end{pmatrix}$$

$$\therefore A+A^2+A^3=\begin{pmatrix}-1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2 & 2\sqrt{3}\\ -2\sqrt{3} & -2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}8 & 0\\ 0 & 8\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}5 & \sqrt{3}\\ -\sqrt{3} & 5\end{pmatrix}\quad\cdots\cdots\text{(答)}$$

(2) $A+A^2+A^3+\cdots\cdots+A^{3n-1}+A^{3n}$

$=(E+A^3+\cdots\cdots+A^{3(n-1)})(A+A^2+A^3)$

$=(1+2^3+\cdots\cdots+2^{3(n-1)})E(A+A^2+A^3)\quad(\because A^{3m}=2^{3m}R(2\pi)=2^{3m}E)$

$=(1+8+\cdots\cdots+8^{n-1})(A+A^2+A^3)$

$=\dfrac{8^n-1}{8-1}(A+A^2+A^3)$

$=\dfrac{8^n-1}{7}\begin{pmatrix}5 & \sqrt{3}\\ -\sqrt{3} & 5\end{pmatrix}\quad\cdots\cdots\text{(答)}$