(1)[解法1]

$a_n=4^{n+1}+5^{2n-1}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ とおく．

もし，すべての自然数 n に対して

$$4^{n+3}=\alpha 4^{n+2}+\beta 4^{n+1} \Leftrightarrow (4\alpha+\beta-4^2)4^{n+1}=0$$

$$5^{2n+3}=\alpha 5^{2n+1}+\beta 5^{2n-1} \Leftrightarrow (5^2\alpha+\beta-5^4)5^{2n-1}=0$$

を満たす実数 α,β が存在すれば，$\{a_n\}$ は漸化式

$$a_{n+2}=\alpha a_{n+1}+\beta a_n \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

を満たす．$4^{n+1}\neq 0,\ 5^{2n-1}\neq 0$ より

連立方程式 $4\alpha+\beta=16,\ 25\alpha+\beta=625$ を解いて，$(\alpha,\beta)=(29,-100)$ より

$$a_{n+2}=29a_{n+1}-100a_n \quad (n=1,2,3,\cdots) \quad \cdots①$$

$a_1=21,\ a_2=4^3+5^3=(4+5)\times(4^2-4\cdot5+5^2)=9\times 21$ は 21 で割り切れる．

a_k,a_{k+1} $(k=1,2,\cdots)$ が 21 で割り切れると仮定すると，

漸化式①より a_{k+2} も 21 で割り切れる．

したがって，数学的帰納法より，すべての自然数に対して a_n は 21 で割り切れる．

(証明終)

(1)[解法2]

$n=1$ のとき，$4^{1+1}+5^{2\cdot1-1}=21$ で 21 で割り切れる．

$n\geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}4^{n+1}+5^{2n-1}&=4^{n+1}+5\cdot 25^{n-1}\\&=4^{n+1}+5(21+4)^{n-1}\\&=4^{n+1}+5\left(\sum_{k=1}^{n-1}{}_{n-1}C_k\,21^k4^{n-1-k}+4^{n-1}\right)\\&=21\left(5\sum_{k=1}^{n-1}{}_{n-1}C_k\,21^{k-1}4^{n-1-k}\right)+4^{n-1}(4^2+5)\\&=21\left(5\sum_{k=1}^{n-1}{}_{n-1}C_k\,21^{k-1}4^{n-1-k}+4^{n-1}\right)\end{aligned}$$

(　)内は整数であるから，21 で割り切れる．(証明終)

(2) 定数でない多項式 $f(x)$ は (b) で $n=1$ としたときの x^2+x+1 を割り切る．

x^2+x+1 は実数係数の範囲でこれ以上因数分解できないから，

$f(x)$ は x^2+x+1 の定数倍であり，(a) から $f(x)=x^2+x+1$ と推定する．

$x^2+x+1=0$ の解は 1 の虚数3乗根 $\omega,\overline{\omega}(=\omega^2)$ であり

$$\omega^{3k}=1,\ \omega^{3k+1}=\omega,\ \omega^{3k+2}=\omega^2 \quad (k\text{は整数})$$

$$\omega+1=-\omega^2$$

が成り立つ．$f_n(x)=x^{n+1}+(x+1)^{2n-1}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ とおく．

m を 0 以上の整数として

(i) $n=3m+1$ のとき

$$\begin{aligned}f_{3m+1}(\omega)&=\omega^{3m+2}+(\omega+1)^{6m+1}\\&=\omega^2+(-\omega^2)^{6m+1}=\omega^2+(-1)^{2\cdot3m+1}\omega^{3\cdot4m+2}\\&=\omega^2-\omega^2=0\end{aligned}$$

(ii) $n=3m+2$ のとき

$$\begin{aligned}f_{3m+2}(\omega)&=\omega^{3m+3}+(\omega+1)^{6m+3}\\&=1+(-\omega^2)^{6m+3}=1+(-1)^{2(3m+1)+1}\omega^{3(4m+2)}\\&=1-1=0\end{aligned}$$

(iii) $n=3m+3$ のとき

$$\begin{aligned}f_{3m+3}(\omega)&=\omega^{3m+4}+(\omega+1)^{6m+5}\\&=\omega^{3(m+1)+1}+(-\omega^2)^{6m+5}=\omega+(-1)^{2(3m+2)+1}\omega^{3(4m+3)+1}\\&=\omega-\omega=0\end{aligned}$$

以上により，$f_n(\omega)=0$，$f_n(x)=0$ は実数係数の方程式であるから

$f_n(\overline{\omega})=0$ も成り立つ．$\omega\neq\overline{\omega}$ であるから，因数定理より

$f_n(x)$ は $(x-\omega)(x-\overline{\omega})=x^2+x+1=f(x)$ で割り切れる．(証明終)

平行移動しても面積は変化しないから，Cの頂点 $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ を原点にくるように

x軸方向に $-\frac{1}{2}$，y軸方向に $\frac{1}{4}$ 平行移動する．

$$C: y=x^2-x \longrightarrow C': y=x^2$$

$$A(\alpha, \alpha^2-\alpha) \longrightarrow A'\left(\alpha-\frac{1}{2}, \left(\alpha-\frac{1}{2}\right)^2\right)$$

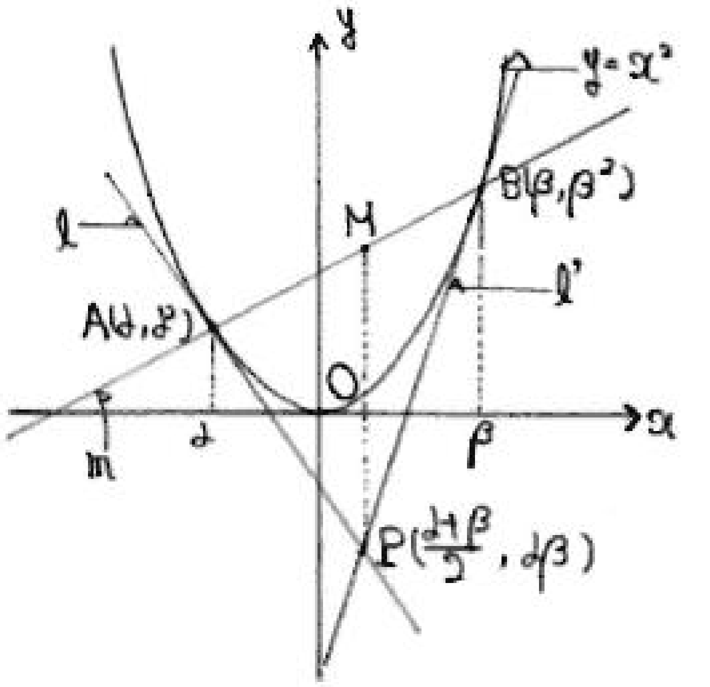
$$B(\beta, \beta^2-\alpha) \longrightarrow B'\left(\beta-\frac{1}{2}, \left(\beta-\frac{1}{2}\right)^2\right)$$

$$y=x^2-x-k \longrightarrow y=x^2-k$$

$\alpha-\frac{1}{2}=\alpha'$，$\beta-\frac{1}{2}=\beta'$ として，'つきで考えればよい．

(以下，表記を簡単にするため，'をつけない．最後に $\alpha\to\alpha-\frac{1}{2}$，$\beta\to\beta-\frac{1}{2}$ とすればよい．)

(1)



l，l'の方程式はそれぞれ

$l: y=2\alpha x-\alpha^2$

$l': y=2\beta x-\beta^2$

よって，交点Pの座標は $\left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \alpha\beta\right)$

直線ABをm，mと直線 $x=\frac{\alpha+\beta}{2}$ の交点をM

Mは線分ABの中点で，座標は $\left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \frac{\alpha^2+\beta^2}{2}\right)$

mの方程式 $m: y=(\alpha+\beta)x-\alpha\beta$

$$\begin{aligned}
S &= \triangle PAB - 図形AOB \\
&= \frac{1}{2}(\beta-\alpha)\left(\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}-\alpha\beta\right) - \int_\alpha^\beta \{(\alpha+\beta)x-\alpha\beta-x^2\}dx \\
&= \frac{1}{4}(\beta-\alpha)^3 + \int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx \\
&= \frac{1}{4}(\beta-\alpha)^3 - \frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3 = \frac{1}{12}(\beta-\alpha)^3
\end{aligned}$$

$\alpha\to\alpha-\frac{1}{2}$，$\beta\to\beta-\frac{1}{2}$ と置き換えて，$S=\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^3$ ……(答)

(2) $P\left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \alpha\beta\right)$ が $y=x^2-k$ 上にあるから

$$\alpha\beta = \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2-k$$

$$\therefore\ k=\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^2=\frac{1}{4}(\beta-\alpha)^2$$

$$\therefore\ S=\frac{1}{12}\{(\beta-\alpha)^2\}^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{12}(4k)^{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}k^{\frac{3}{2}}$$ —(答)

(1) (凹凸は特に指定されなければ考えなくてもよいが，グラフをきちんと描きたいので

ここでは考えることにする.)

$$f_n(x)=\frac{2nx}{x^2+n^2}\quad (x\geqq 0)$$

$$f_n'(x)=\frac{2n}{(x^2+n^2)^2}\{1\cdot(x^2+n^2)-x\cdot 2x\}$$

$$=\frac{2n}{(x^2+n^2)^2}(n^2-x^2)=\frac{2n}{(x^2+n^2)^2}(n+x)(n-x)$$

$$f_n''(x)=2n\{(-2)(x^2+n^2)^{-3}(2x)(n^2-x^2)+(x^2+n^2)^{-2}(-2x)\}$$

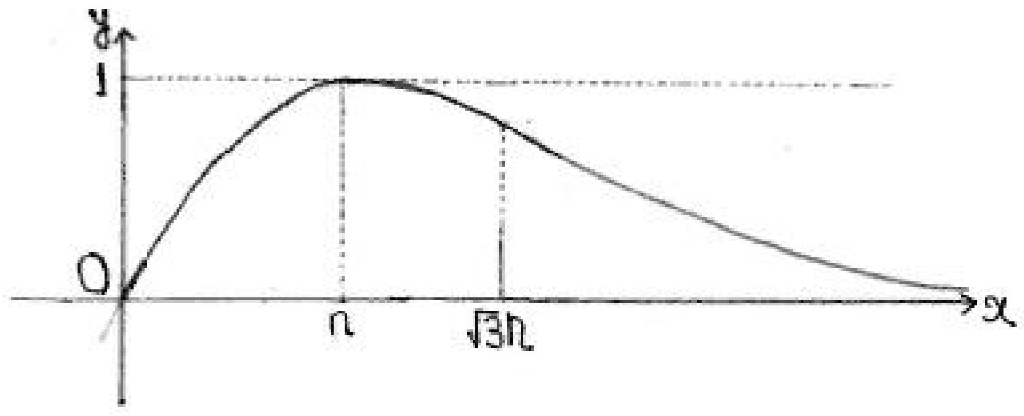
$$=\cdots=\frac{-4nx}{(x^2+n^2)^3}(3n^2-x^2)=-\frac{4nx}{(x^2+n^2)^3}(\sqrt{3}n+x)(\sqrt{3}n-x)$$

x	0		n		$\sqrt{3}n$	
$f'(x)$		+	0		−	
$f''(x)$	0		−		0	+
$f(x)$	0	↗	1	↘	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	↘
			(極大)		(変曲点)	

$f(0)=0$，$f(n)=1$，$f(\sqrt{3}n)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

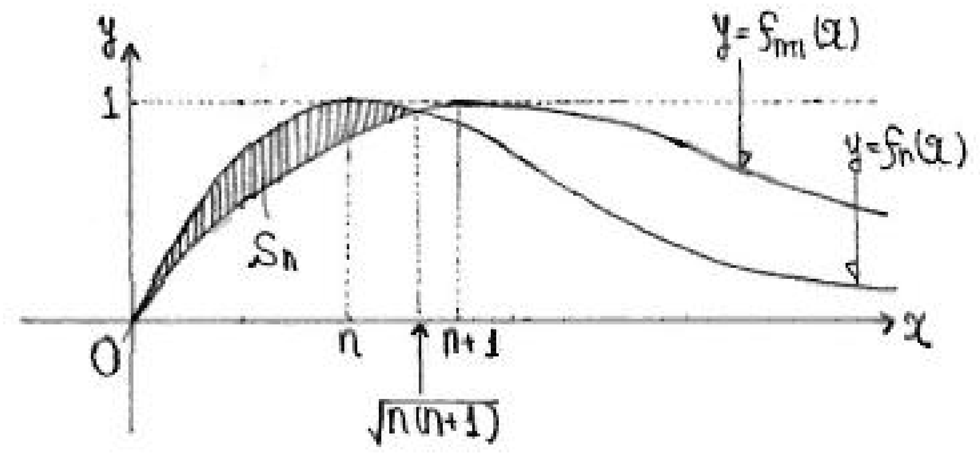
$\lim_{x\to 0} f_n(x)=\lim_{x\to\infty}\dfrac{2n\cdot\frac{1}{x}}{1+\frac{n^2}{x^2}}=0$

$f'(0)=\frac{2}{n}$



……(答)

(2)



$f_n(x)\gtreqless f_{n+1}(x)$

$\dfrac{2nx}{x^2+n^2}\gtreqless\dfrac{2(n+1)x}{x^2+(n+1)^2}$

$2x\cdot n\{x^2+(n+1)^2\}\gtreqless 2x\cdot(n+1)($

$2x\{n(n+1)-x^2\}\gtreqless 0$

(複号同順)

$f_n(x)=f_{n+1}(x)$ を解くと，$x=0,\ \pm\sqrt{n(n+1)}$

2曲線 $y=f_n(x)$，$y=f_{n+1}(x)$ は上の図のようになる.

$\int f_n(x)dx=n\log(x^2+n^2)+C$

(Cは積分定数)

$$S_n=\int_0^{\sqrt{n(n+1)}}\{f_n(x)-f_{n+1}(x)\}dx$$

$$=\Big[n\log(x^2+n^2)-(n+1)\log\{x^2+(n+1)^2\}\Big]_0^{\sqrt{n(n+1)}}$$

$$=n\log\{n(2n+1)\}-(n+1)\log\{(n+1)(2n+1)\}-n\log n^2+(n+1)\log(n+1)^2$$

$$=n\{\log n+\log(2n+1)\}-(n+1)\{\log(n+1)+\log(2n+1)\}$$
$$-2n\log n+2(n+1)\log(n+1)$$

$$=(n+1)\log(n+1)-n\log n-\log(2n+1)\quad\text{……(答)}$$

(3)
$$S_n=(n+1)\log(n+1)-n\log n-\log(2n+1)$$

$$=n\{\log(n+1)-\log n\}-\{\log(2n+1)-\log(n+1)\}$$

$$=n\log\left(1+\frac{1}{n}\right)-\log\frac{2n+1}{n+1}$$

$$=\log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-\log\frac{2+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}$$

関数 $y=\log x$ は連続，

$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$，$\lim_{n\to\infty}\dfrac{2+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}=2$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\log e-\log 2=1-\log 2\quad\text{……(答)}$$

$$A=\begin{pmatrix}-1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & -1\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}\cos\frac{2}{3}\pi & -\sin\frac{2}{3}\pi\\ \sin\frac{2}{3}\pi & \cos\frac{2}{3}\pi\end{pmatrix}$$

(1). $R(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ とおくと，$\{R(\theta)\}^n=R(n\theta)$ である．

$$(E-A)(E+A+A^2)=E-A^3$$

$\det(E-A)=\det\begin{pmatrix}2 & \sqrt{3}\\ -\sqrt{3} & 2\end{pmatrix}=7\neq 0$ より $(E-A)^{-1}$ が存在し

$$E+A+A^2=(E-A)^{-1}(E-A^3)$$

$$=(E-A)^{-1}(-7E) \qquad (\because A^3=2^3\{R(\tfrac{2}{3}\pi)\}^3=2^3R(2\pi)=2^3E)$$

$$\therefore A+A^2+A^3=-7A(E-A)^{-1}$$

$$=-7\begin{pmatrix}-1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & -1\end{pmatrix}\frac{1}{7}\begin{pmatrix}2 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 2\end{pmatrix}$$

$$=-\begin{pmatrix}-5 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & -5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & \sqrt{3}\\ -\sqrt{3} & 5\end{pmatrix} \quad \cdots\cdots\text{(答)}$$

(2) $$(E-A)\left(\sum_{k=0}^{3n-1}A^k\right)=E-A^{3n}$$

$$\sum_{k=0}^{3n-1}A^k=(E-A)^{-1}(E-A^{3n})$$

$$=(E-A)^{-1}(1-2^{3n})E \qquad (\because A^{3n}=(A^3)^n=2^{3n}E)$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{3n}A^k=(1-8^n)A(E-A)^{-1}$$

$$=(1-8^n)\left(-\frac{1}{7}\right)(A+A^2+A^3)$$

$$=\frac{8^n-1}{7}\begin{pmatrix}5 & \sqrt{3}\\ -\sqrt{3} & 5\end{pmatrix} \quad \cdots\cdots\text{(答)}$$