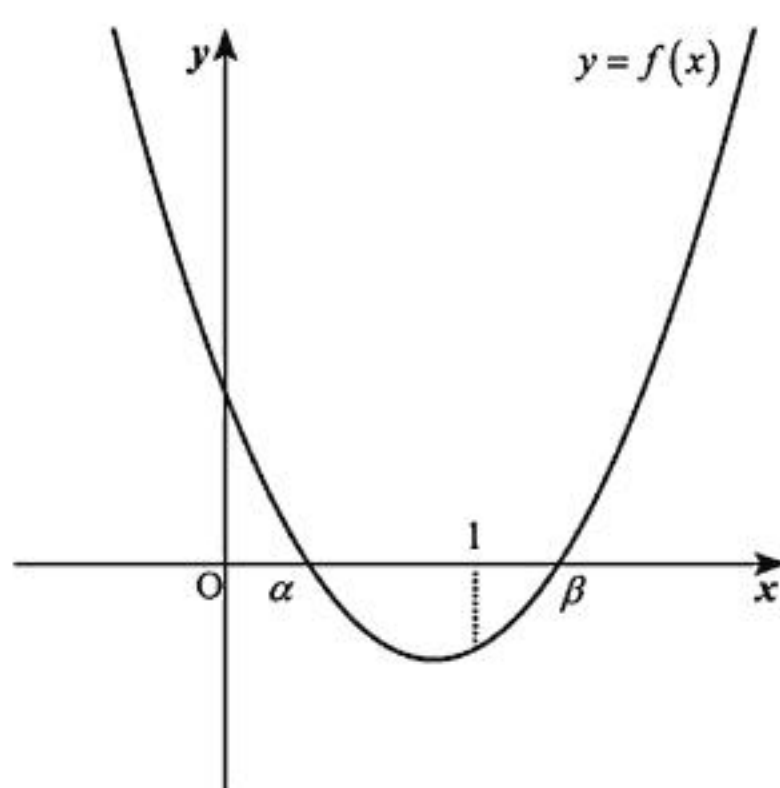


(1)

$f(x) = x^2 + (3k-2)x + 4k$ とおくと、 $f(x) = 0$ が解 $x = \alpha, \beta$ を持ち、 $0 < \alpha < 1 < \beta$ を満たすとき、 $y = f(x)$ のグラフは次図になる。



よって、 $f(0) > 0$ かつ $f(1) < 0$ を満たせばよいので、

$$\begin{cases} f(0) = 4k > 0 \\ f(1) = 7k - 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k > 0 \\ k < \frac{1}{7} \end{cases}$$

したがって、求める k の値の範囲は、

$$0 < k < \frac{1}{7}$$

$$(\text{答}) \quad 0 < k < \frac{1}{7}$$

(2)

$$x^2 + (3k-2)x + 4k = 0$$

の解が $x = \alpha, \beta$ であることから、解と係数の関係より α, β の間に、

$$\alpha + \beta = -3k + 2$$

$$\alpha\beta = 4k$$

の関係が成り立つ。よって、

$$\begin{aligned} (\beta - \alpha)^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta \\ &= (-3k + 2)^2 - 4 \cdot 4k \\ &= 9k^2 - 28k + 4 \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad (\beta - \alpha)^2 = 9k^2 - 28k + 4$$

(3)

α, β の差が整数ならば、 $(\beta - \alpha)^2$ は平方数である。

$g(k) = (\beta - \alpha)^2 = 9k^2 - 28k + 4$ とおく。

$$g(k) = 9\left(k - \frac{14}{9}\right)^2 - \frac{160}{9}$$

と変形できる。よって、(1)より k の範囲は $0 < k < \frac{1}{7}$ であり、この範囲では $y = g(k)$ は単調減少する。

$$g(k) > g\left(\frac{1}{7}\right) = \frac{9}{49}$$

$$g(k) < g(0) = 4$$

なので

$$\Leftrightarrow \frac{9}{49} < g(k) < 4$$

となる。よって、 $g(k) = (\beta - \alpha)^2$ が平方数であるとき、

$$g(k) = 1$$

である。ゆえに、

$$9k^2 - 28k + 4 = 1$$

$$\Leftrightarrow (9k-1)(k-3) = 0$$

であり、 $0 < k < \frac{1}{7}$ なので、これを満たす k は $k = \frac{1}{9}$ である。 $k = \frac{1}{9}$ を問の2次方程式に代入すれば、

$$x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{4}{9} = 0$$

$$\Leftrightarrow 9x^2 - 15x + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (3x-4)(3x-1) = 0$$

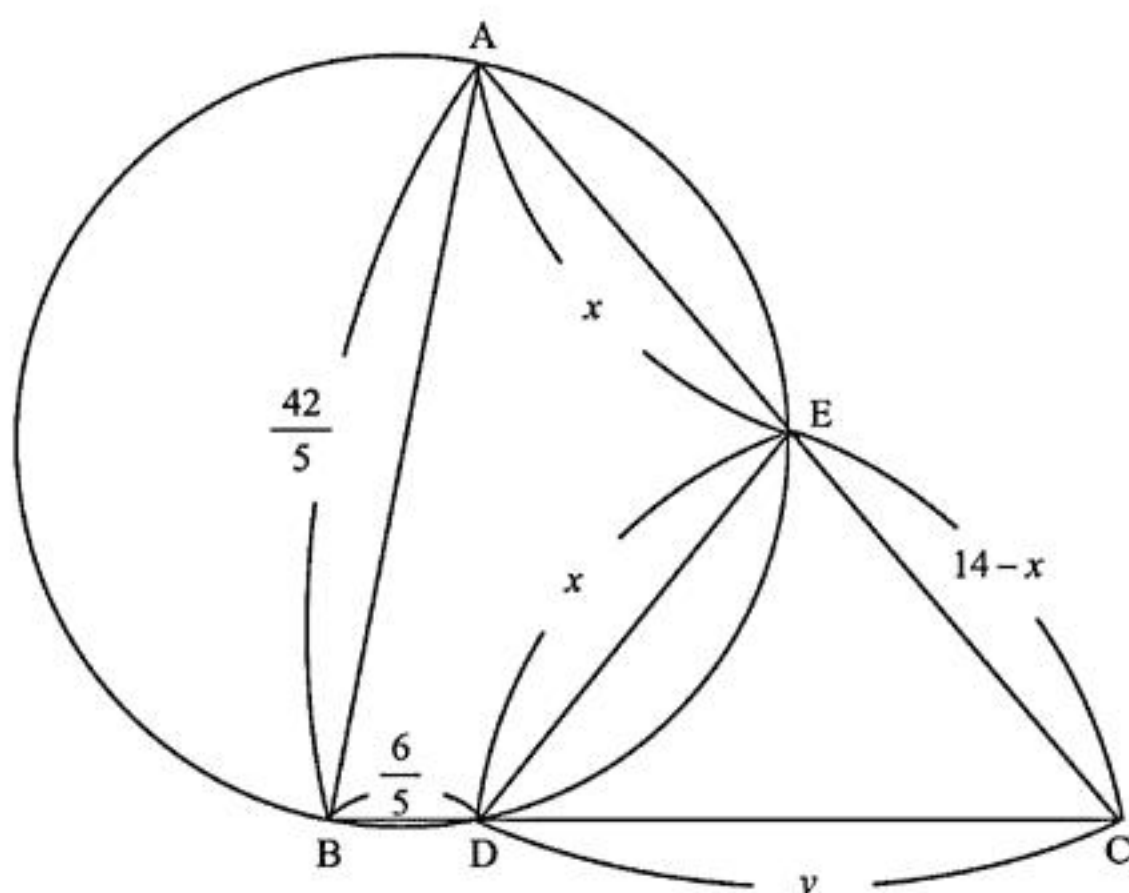
$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{3}, \frac{4}{3}$$

$0 < \alpha < 1 < \beta$ なので、

$$\alpha = \frac{1}{3}, \beta = \frac{4}{3}$$

である。

$$(\text{答}) \quad k = \frac{1}{9}, \alpha = \frac{1}{3}, \beta = \frac{4}{3}$$



(1)

$AE = DE = x$, $CD = y$ とおく。四角形 ABDE は円に内接するので、

$$\angle CED = \angle CBA$$

$$\angle CDE = \angle CAB$$

である。ゆえに、

$$\triangle CDE \sim \triangle CAB$$

である。よって、

$$CD : CE = CA : CB$$

$$y : (14 - x) = 14 : \left(y + \frac{6}{5} \right)$$

$$\Leftrightarrow y \left(y + \frac{6}{5} \right) = 14(14 - x) \quad \dots \textcircled{1}$$

また、

$$CD : DE = CA : AB$$

$$y : x = 14 : \frac{42}{5}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3}{5}y \quad \dots \textcircled{2}$$

②を①に代入して整理すると、

$$(y - 10)(5y + 98) = 0$$

$$\therefore y = 10 \quad (\because y > 0)$$

②より、

$$x = 6$$

したがって、

$$AE = x = 6, CD = y = 10$$

である。

(答) $AE = 6, CD = 10$

(2)

$\triangle CDE$ に余弦定理を用いると、(1)の結果から、

$$\begin{aligned} \cos \angle CED &= \frac{EC^2 + ED^2 - CD^2}{2EC \cdot ED} \\ &= \frac{8^2 + 6^2 - 10^2}{2 \cdot 8 \cdot 6} \\ &= 0 \end{aligned}$$

よって、 $0^\circ < \angle CED < 180^\circ$ より、 $\angle CED = 90^\circ$ である。ゆえに、

$$\angle AED = 180^\circ - \angle CED = 90^\circ$$

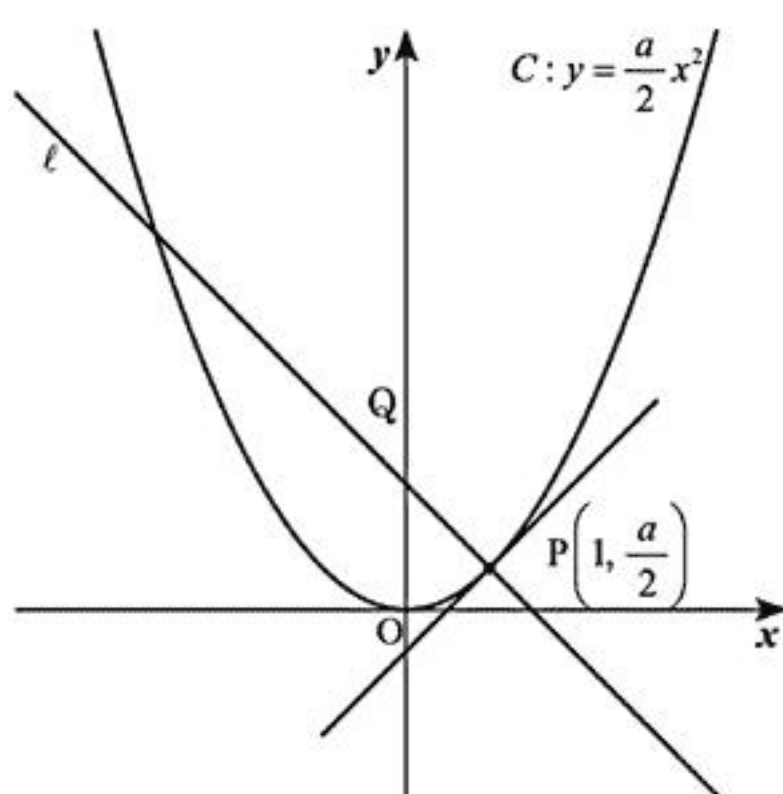
であり、 $\triangle EAD$ は $EA = ED = 6$ の直角二等辺三角形である。

したがって、辺 AD は円 O の直径であり、

$$AD = \sqrt{2}EA = 6\sqrt{2}$$

なので、円 O の半径は $3\sqrt{2}$ である。

(答) $3\sqrt{2}$



(1)

$y = \frac{a}{2}x^2$ について,

$$y' = ax$$

直線 ℓ は放物線 C の、点 P における法線なので、その方程式は、

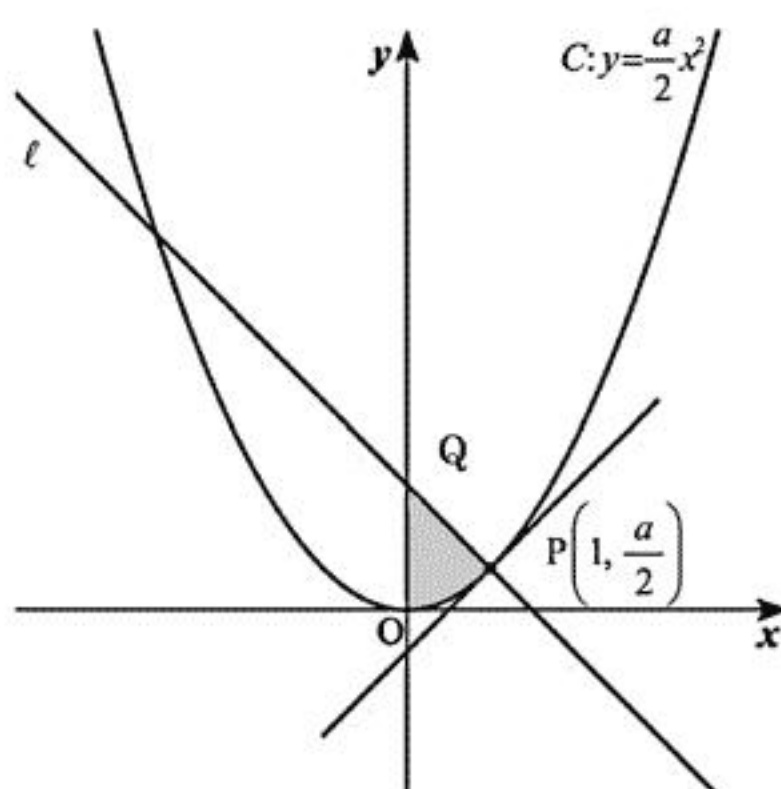
$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{a}(x-1) + \frac{a}{2} \\ &= -\frac{1}{a}x + \frac{1}{a} + \frac{a}{2} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad y = -\frac{1}{a}x + \frac{1}{a} + \frac{a}{2}$$

(2)

S_1 は次図の灰色部分の面積である。



$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^1 \left\{ \left(-\frac{1}{a}x + \frac{1}{a} + \frac{a}{2} \right) - \frac{a}{2}x^2 \right\} dx \\ &= \left[-\frac{a}{6}x^3 - \frac{1}{2a}x^2 + \left(\frac{1}{a} + \frac{a}{2} \right)x \right]_0^1 \\ &= \frac{a}{3} + \frac{1}{2a} \end{aligned}$$

$a > 0$ より、相加相乗平均の関係から、

$$S_1 \geq 2\sqrt{\frac{a}{3} \cdot \frac{1}{2a}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

が成り立つ。等号は、

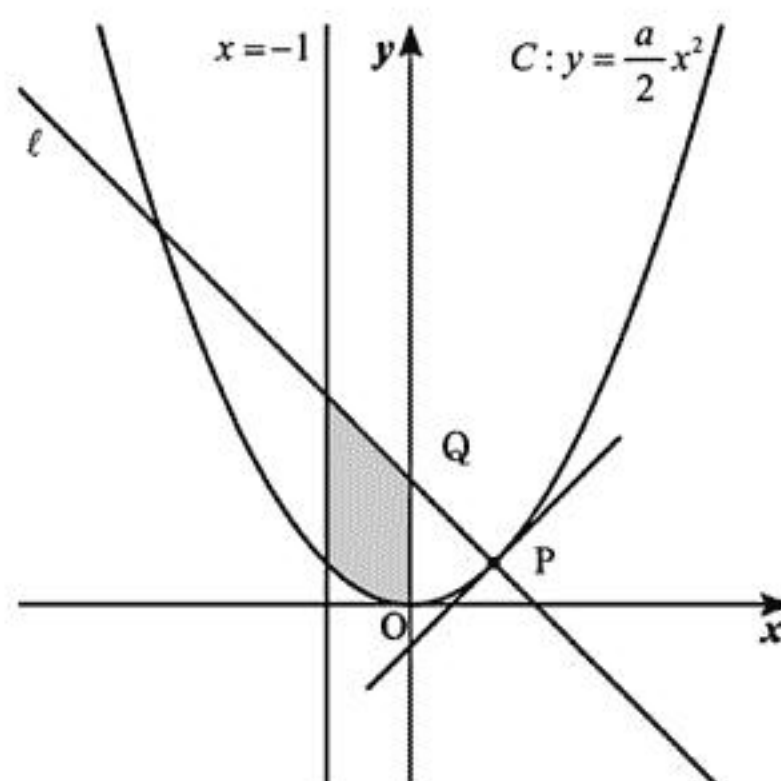
$$\begin{aligned} \frac{a}{3} &= \frac{1}{2a} \\ \Leftrightarrow a^2 &= \frac{3}{2} \\ \Leftrightarrow a &= \frac{\sqrt{6}}{2} \quad (\because a > 0) \end{aligned}$$

のとき成り立つ。逆に、 $a = \frac{\sqrt{6}}{2}$ のとき S_1 は最小値をとるので、これが求める a の値である。

$$(\text{答}) \quad a = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

(3)

S_2 は次図の灰色部分の面積である。



$$\begin{aligned} S_2 &= \int_{-1}^0 \left\{ \left(-\frac{1}{a}x + \frac{1}{a} + \frac{a}{2} \right) - \frac{a}{2}x^2 \right\} dx \\ &= \left[-\frac{a}{6}x^3 - \frac{1}{2a}x^2 + \left(\frac{1}{a} + \frac{a}{2} \right)x \right]_{-1}^0 \\ &= \frac{a}{3} + \frac{3}{2a} \end{aligned}$$

よって、 $S_2 = 2S_1$ が成り立つとき、

$$\begin{aligned} \frac{a}{3} + \frac{3}{2a} &= 2\left(\frac{a}{3} + \frac{1}{2a} \right) \\ \Leftrightarrow a^2 &= \frac{3}{2} \\ \Leftrightarrow a &= \frac{\sqrt{6}}{2} \quad (\because a > 0) \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad a = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

(1)

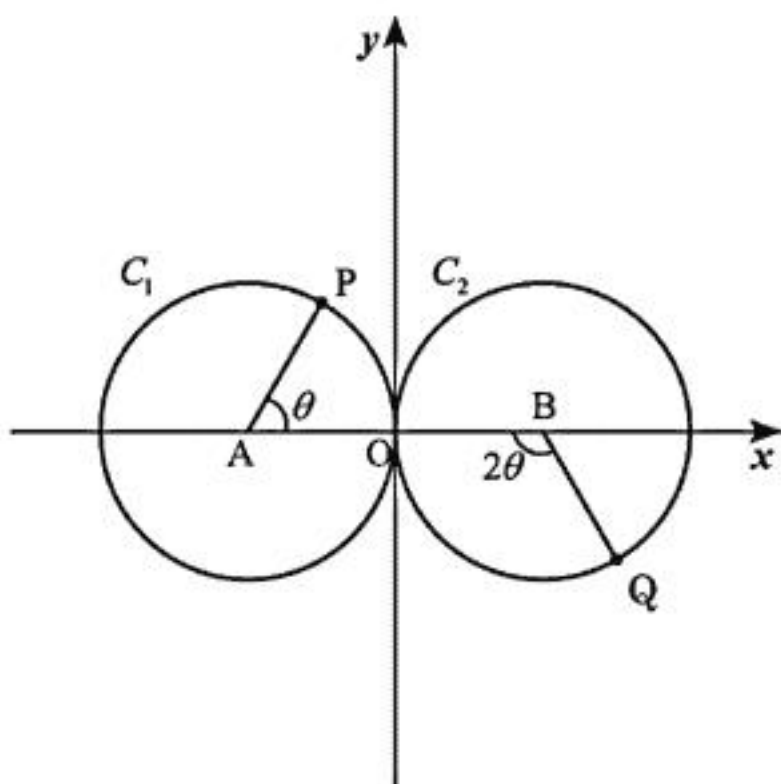
円 C_1 は点 $A(-1, 0)$ を通り、原点 O を通るので、その半径は 1 である。よって、円 C_1 の方程式は、

$$C_1: (x+1)^2 + y^2 = 1$$

である。同様に、円 C_2 の方程式は、

$$C_2: (x-1)^2 + y^2 = 1$$

である。また、 Q は P の 2 倍の速さで回転するので、 $\angle OBQ = 2\theta$ である。よって、次図が描ける。



よって、 P の座標は、

$$(-1 + \cos \theta, \sin \theta)$$

である。また Q の座標は、

$$(1 + \cos(\pi + 2\theta), \sin(\pi + 2\theta)) = (1 - \cos 2\theta, -\sin 2\theta)$$

である。

$$\begin{array}{ll} \text{(答)} & P \quad (-1 + \cos \theta, \sin \theta) \\ & Q \quad (1 - \cos 2\theta, -\sin 2\theta) \end{array}$$

(2)

$$\begin{aligned} PQ^2 &= \{(-1 + \cos \theta) - (1 - \cos 2\theta)\}^2 + \{\sin \theta - (-\sin 2\theta)\}^2 \\ &= (\cos \theta + \cos 2\theta - 2)^2 + (\sin \theta + \sin 2\theta)^2 \\ &= 2 \sin \theta \sin 2\theta + 2 \cos 2\theta (\cos \theta - 2) - 4 \cos \theta + 6 \\ &= 4 \sin^2 \theta \cos \theta + 2(2 \cos^2 \theta - 1)(\cos \theta - 2) - 4 \cos \theta + 6 \\ &= 4(1 - \cos^2 \theta) \cos \theta + 2(2 \cos^2 \theta - 1)(\cos \theta - 2) - 4 \cos \theta + 6 \end{aligned}$$

ただし、 $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$, $\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1$, $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$ を用いた。ここで、 $t = \cos \theta$ とおくと、

$$\begin{aligned} PQ^2 &= 4t(1 - t^2) + 2(2t^2 - 1)(t - 2) - 4t + 6 \\ &= -8t^2 - 2t + 10 \\ &= -8\left(t + \frac{1}{8}\right)^2 + \frac{81}{8} \end{aligned}$$

となる。 $\theta \geq 0$ より、 $-1 \leq t = \cos \theta \leq 1$ なので、 PQ^2 は $t = -\frac{1}{8}$ のとき、最大値 $\frac{81}{8}$ をとる。

$PQ > 0$ より、 PQ^2 が最大るとき PQ も最大である。したがって求める最大値は、

$$\sqrt{\frac{81}{8}} = \frac{9\sqrt{2}}{4}$$

である。

$$\text{(答)} \quad \frac{9\sqrt{2}}{4}$$