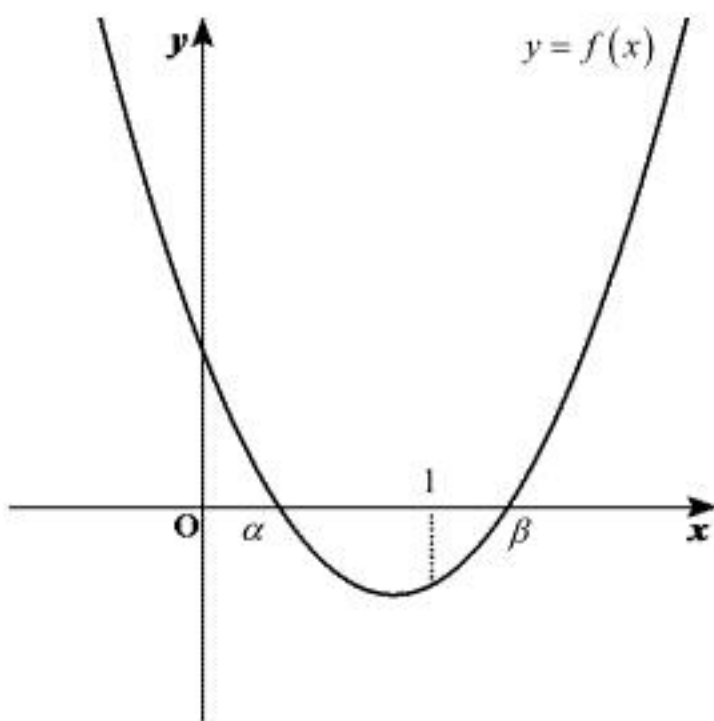


1

(1)

$f(x) = x^2 + (3k-2)x + 4k$ とおくと、 $f(x) = 0$ が解 $x = \alpha, \beta$ を持ち、 $0 < \alpha < 1 < \beta$ を満たすとき、 $y = f(x)$ のグラフは次図になる。



よって、 $f(0) > 0$ かつ $f(1) < 0$ を満たせばよいので、

$$\begin{cases} f(0) = 4k > 0 \\ f(1) = 7k - 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k > 0 \\ k < \frac{1}{7} \end{cases}$$

したがって、求める k の値の範囲は、

$$0 < k < \frac{1}{7}$$

(答) $0 < k < \frac{1}{7}$

(2)

$$x^2 + (3k-2)x + 4k = 0$$

の解が $x = \alpha, \beta$ であることから、解と係数の関係より α, β の間に、

$$\alpha + \beta = -3k + 2$$

$$\alpha\beta = 4k$$

の関係が成り立つ。よって、

$$\begin{aligned} (\beta - \alpha)^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta \\ &= (-3k + 2)^2 - 4 \cdot 4k \\ &= 9k^2 - 28k + 4 \end{aligned}$$

である。

(答) $(\beta - \alpha)^2 = 9k^2 - 28k + 4$

(3)

α, β の差が整数ならば、 $(\beta - \alpha)^2$ は平方数である。

$g(k) = (\beta - \alpha)^2 = 9k^2 - 28k + 4$ とおく。

$$g(k) = 9\left(k - \frac{14}{9}\right)^2 - \frac{160}{9}$$

と変形できる。よって、(1)より k の範囲は $0 < k < \frac{1}{7}$ であり、この範囲では $y = g(k)$ は単調減少する。

$$\begin{aligned} g(k) &> g\left(\frac{1}{7}\right) = \frac{9}{49} \\ g(k) &< g(0) = 4 \end{aligned}$$

なので

$$\Leftrightarrow \frac{9}{49} < g(k) < 4$$

となる。よって、 $g(k) = (\beta - \alpha)^2$ が平方数であるとき、

$$g(k) = 1$$

である。ゆえに、

$$\begin{aligned} 9k^2 - 28k + 4 &= 1 \\ \Leftrightarrow (9k - 1)(k - 3) &= 0 \end{aligned}$$

であり、 $0 < k < \frac{1}{7}$ なので、これを満たす k は $k = \frac{1}{9}$ である。 $k = \frac{1}{9}$ を問の 2 次方程式に代入すれば、

$$\begin{aligned} x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{4}{9} &= 0 \\ \Leftrightarrow 9x^2 - 15x + 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow (3x - 4)(3x - 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}, \frac{4}{3} \end{aligned}$$

$0 < \alpha < 1 < \beta$ なので、

$$\alpha = \frac{1}{3}, \beta = \frac{4}{3}$$

である。

(答) $k = \frac{1}{9}, \alpha = \frac{1}{3}, \beta = \frac{4}{3}$

(1)

円 C_1 は点 $A(-1, 0)$ を通り、原点 O を通るので、その半径は 1 である。よって、円 C_1 の方程式は、

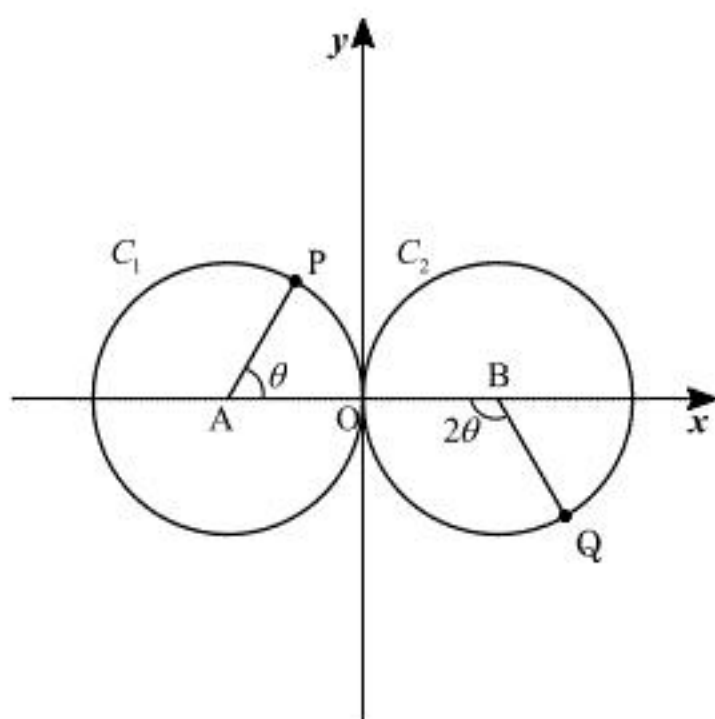
$$C_1: (x+1)^2 + y^2 = 1$$

である。同様に、円 C_2 の方程式は、

$$C_2: (x-1)^2 + y^2 = 1$$

である。また、 Q は P の 2 倍の速さで回転するので、 $\angle OBQ = 2\theta$ である。

よって、次図が描ける。



よって、 P の座標は、

$$(-1 + \cos \theta, \sin \theta)$$

である。また Q の座標は、

$$(1 + \cos(\pi + 2\theta), \sin(\pi + 2\theta)) = (1 - \cos 2\theta, -\sin 2\theta)$$

である。

$$\begin{aligned} \text{(答)} \quad P & \quad (-1 + \cos \theta, \sin \theta) \\ Q & \quad (1 - \cos 2\theta, -\sin 2\theta) \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} PQ^2 &= \{(-1 + \cos \theta) - (1 - \cos 2\theta)\}^2 + \{\sin \theta - (-\sin 2\theta)\}^2 \\ &= (\cos \theta + \cos 2\theta - 2)^2 + (\sin \theta + \sin 2\theta)^2 \\ &= 2 \sin \theta \sin 2\theta + 2 \cos 2\theta (\cos \theta - 2) - 4 \cos \theta + 6 \\ &= 4 \sin^2 \theta \cos \theta + 2(2 \cos^2 \theta - 1)(\cos \theta - 2) - 4 \cos \theta + 6 \\ &= 4(1 - \cos^2 \theta) \cos \theta + 2(2 \cos^2 \theta - 1)(\cos \theta - 2) - 4 \cos \theta + 6 \end{aligned}$$

ただし、 $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$, $\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1$, $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$ を用いた。ここで、 $t = \cos \theta$ とおくと、

$$\begin{aligned} PQ^2 &= 4t(1 - t^2) + 2(2t^2 - 1)(t - 2) - 4t + 6 \\ &= -8t^2 - 2t + 10 \\ &= -8\left(t + \frac{1}{8}\right)^2 + \frac{81}{8} \end{aligned}$$

となる。 $\theta \geq 0$ より、 $-1 \leq t = \cos \theta \leq 1$ なので、 PQ^2 は $t = -\frac{1}{8}$ のとき、最大値 $\frac{81}{8}$ をとる。

$PQ > 0$ より、 PQ^2 が最大るとき PQ も最大である。したがって求める最大値は、

$$\sqrt{\frac{81}{8}} = \frac{9\sqrt{2}}{4}$$

である。

$$\text{(答)} \quad \frac{9\sqrt{2}}{4}$$

(1)

$c_n = -a_n + b_n$, $d_n = 2a_n - b_n$ の n を $n+1$ に置き換えると,

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= -a_{n+1} + b_{n+1} \\ &= -(6a_n - b_n) + (2a_n + 3b_n) \\ &= -4a_n + 4b_n \\ &= 4c_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_{n+1} &= 2a_{n+1} - b_{n+1} \\ &= 2(6a_n - b_n) - (2a_n + 3b_n) \\ &= 10a_n - 5b_n \\ &= 5d_n \end{aligned}$$

となる。ただし、(ii)を用いた。これが数列 $\{c_n\}$, $\{d_n\}$ が満たす漸化式である。

$$(\text{答}) \quad c_{n+1} = 4c_n, \quad d_{n+1} = 5d_n$$

(2)

$c_{n+1} = 4c_n$ より、数列 $\{c_n\}$ は公比 4、初項 $c_1 = -a_1 + b_1 = -1$ の等比数列である。ゆえに、

$$c_n = -4^{n-1} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

である。同様に、数列 $\{d_n\}$ は公比 5、初項 $d_1 = 2a_1 - b_1 = 4$ の等比数列である。ゆえに、

$$d_n = 4 \cdot 5^{n-1} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

である。

$$(\text{答}) \quad c_n = -4^{n-1} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

$$d_n = 4 \cdot 5^{n-1} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

(3)

(2)の結果より、

$$\begin{aligned} c_n &= -a_n + b_n = -4^{n-1} \\ d_n &= 2a_n - b_n = 4 \cdot 5^{n-1} \end{aligned}$$

$c_n + d_n$ を考えると、

$$a_n = 4 \cdot 5^{n-1} - 4^{n-1}$$

となる。同様に、 $2c_n + d_n$ を考えると、

$$b_n = 4 \cdot 5^{n-1} - 2 \cdot 4^{n-1}$$

となる。この a_n , b_n についての 2 式は $n=1, 2, 3, \dots$ について成り立つ。

$$(\text{答}) \quad a_n = 4 \cdot 5^{n-1} - 4^{n-1} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

$$b_n = 4 \cdot 5^{n-1} - 2 \cdot 4^{n-1} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

4

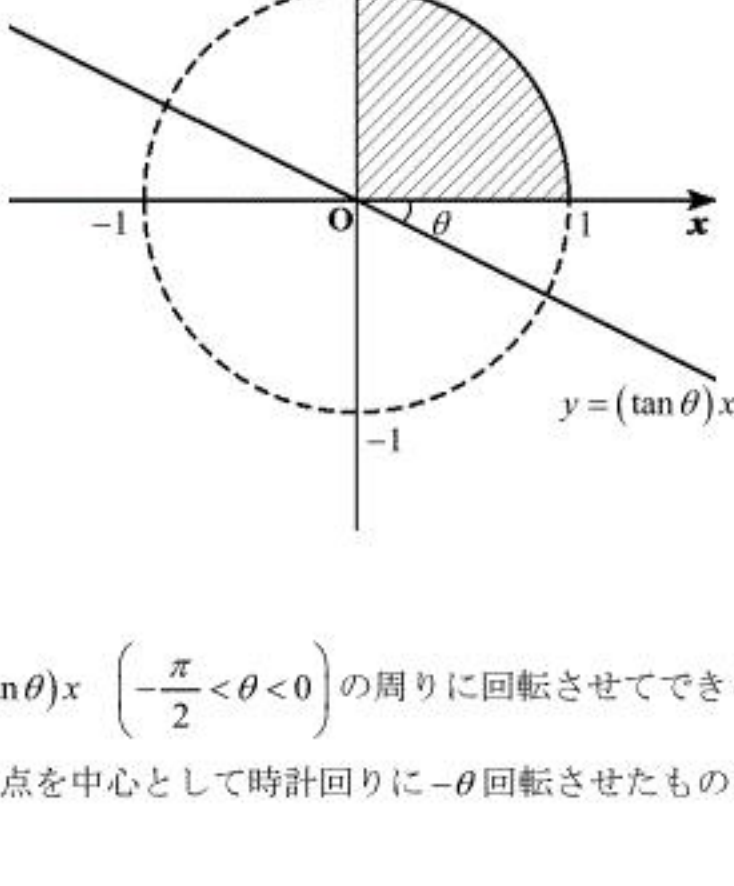
(1)

連立不等式

$$x^2 + y^2 \leq 1, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0$$

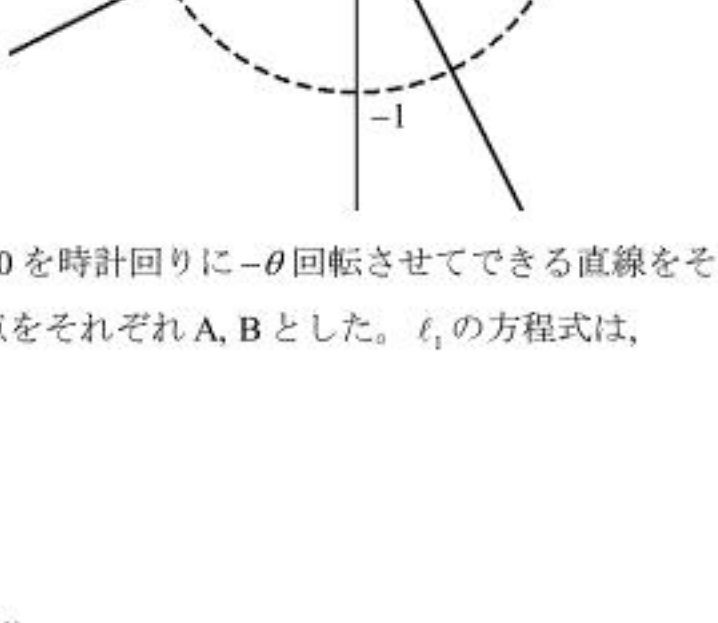
の表す領域と直線 $y = (\tan \theta)x$ を図示したものを次図(a)に示す。領域は図の斜線部である。ただし、境界線は全て含む。

(a)



この領域を直線 $y = (\tan \theta)x$ $\left(-\frac{\pi}{2} < \theta < 0\right)$ の周りに回転させてできる回転体の体積を求め
るため、図(a)全体を原点を中心として時計回りに $-\theta$ 回転させたものを考える。それを次図
(b)に示す。

(b)



ただし、直線 $x=0, y=0$ を時計回りに $-\theta$ 回転させてできる直線をそれぞれ ℓ_1, ℓ_2 とし、それ
らと円 $x^2 + y^2 = 1$ の交点をそれぞれ A, B とした。 ℓ_1 の方程式は、

$$y = \{ \tan(-\theta) \} x \\ = -(\tan \theta)x$$

ℓ_2 の方程式は、

$$y = \left\{ \tan \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \right\} x \\ = \frac{x}{\tan \theta}$$

また、点 A, B の x 座標 A_x, B_x はそれぞれ、

$$A_x = \cos(-\theta) = \cos \theta$$

$$B_x = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) = \sin \theta$$

さらに、円 $x^2 + y^2 = 1$ の $y \geq 0$ の部分は $y = \sqrt{1-x^2}$ と表せる。したがって、 V は図(b)の斜線部
を x 軸周りに回転させてできる回転体の体積に等しいので、

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{\sin \theta}^0 \left\{ \left(\sqrt{1-x^2} \right)^2 - \left(\frac{x}{\tan \theta} \right)^2 \right\} dx + \pi \int_0^{\cos \theta} \left\{ \left(\sqrt{1-x^2} \right)^2 - \left((\tan \theta)x \right)^2 \right\} dx \\ &= \pi \int_{\sin \theta}^0 \left(1-x^2 - \frac{x^2}{\tan^2 \theta} \right) dx + \pi \int_0^{\cos \theta} \left(1-x^2 - (\tan^2 \theta)x^2 \right) dx \\ &= \pi \int_{\sin \theta}^0 \left\{ 1-x^2 \left(1 + \frac{1}{\tan^2 \theta} \right) \right\} dx + \pi \int_0^{\cos \theta} \left\{ 1-x^2 (1 + \tan^2 \theta) \right\} dx \\ &= \pi \int_{\sin \theta}^0 \left(1 - \frac{x^2}{\sin^2 \theta} \right) dx + \pi \int_0^{\cos \theta} \left(1 - \frac{x^2}{\cos^2 \theta} \right) dx \\ &\quad \left(\because \begin{cases} 1 + \frac{1}{\tan^2 \theta} = \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} = \frac{1}{\sin^2 \theta} \\ 1 + \tan^2 \theta = \frac{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta} \end{cases} \right) \\ &= \pi \left[x - \frac{x^3}{3 \sin^2 \theta} \right]_{\sin \theta}^0 + \pi \left[x - \frac{x^3}{3 \cos^2 \theta} \right]_0^{\cos \theta} \\ &= \frac{2}{3} \pi (\cos \theta - \sin \theta) \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad V = \frac{2}{3} \pi (\cos \theta - \sin \theta)$$

(2)

$0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ のとき、 θ の値によつて

$$[1] \theta = 0 \quad [2] 0 < \theta < \frac{\pi}{4} \quad [3] \frac{\pi}{4} \leq \theta < \frac{\pi}{2}$$

と場合分けをして考える。

[1] $\theta = 0$ のとき

V は、領域

$$x^2 + y^2 \leq 1, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0$$

を x 軸周りに回転させてできる回転体、つまり半径 1 の半球の体積なので、

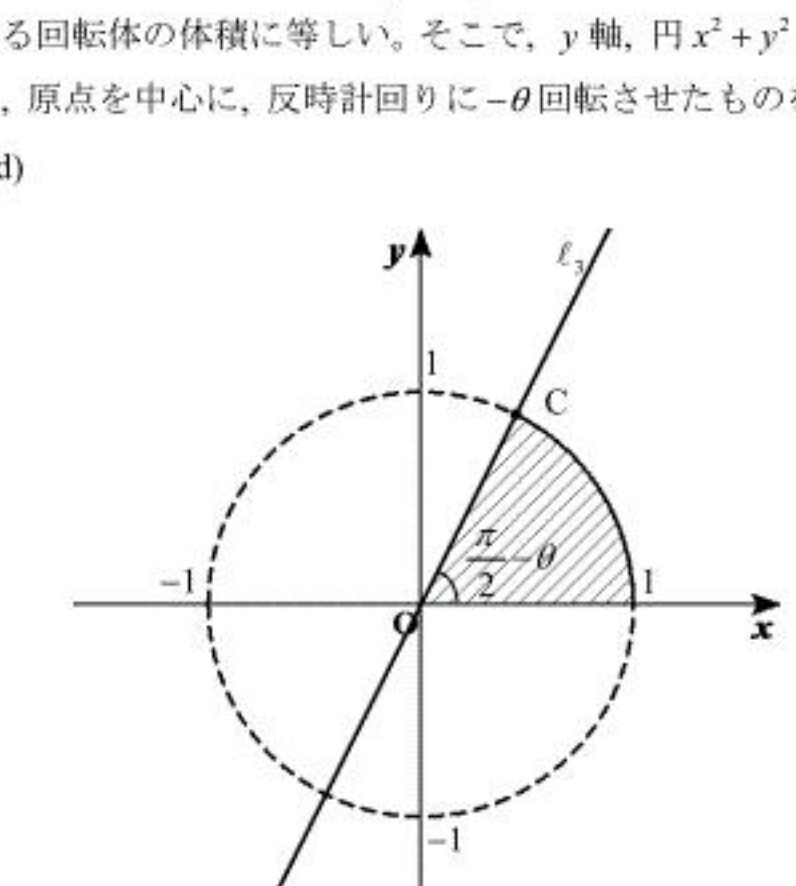
$$\frac{4}{3} \pi \cdot 1^3 \times \frac{1}{2} = \frac{2}{3} \pi$$

である。

[2] $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ のとき

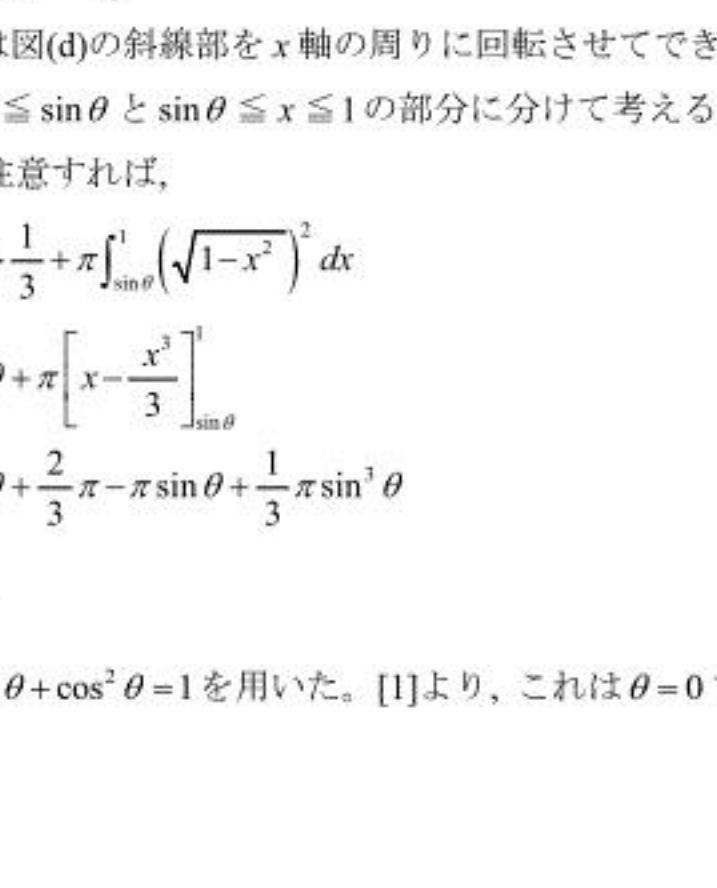
(1)と同様に、領域と直線を図示したものを(c)に示す。ただし、 $y = (\tan 2\theta)x$ も共に示した。

(c)



いま、 x 軸、円 $x^2 + y^2 = 1$ 、直線 $y = (\tan \theta)x$ で囲まれる部分と、円 $x^2 + y^2 = 1$ 、直線
 $y = (\tan \theta)x$ 、直線 $y = (\tan 2\theta)x$ で囲まれる部分は、直線 $y = (\tan \theta)x$ に関して対称なので、
これらの 2 つの領域を直線 $y = (\tan \theta)x$ の周りに回転させてできる回転体は一致する。
よつて、 V は y 軸、円 $x^2 + y^2 = 1$ 、直線 $y = (\tan \theta)x$ で囲まれる部分を直線 $y = (\tan \theta)x$ 周
りに回転させてできる回転体の体積に等しい。そこで、 y 軸、円 $x^2 + y^2 = 1$ 、直線 $y = (\tan \theta)x$
で囲まれる部分を、原点を中心に、反時計回りに $-\theta$ 回転させたものを図(d)に示す。

(d)



ただし、直線 $x=0$ を滅点を中心に反時計回りに $-\theta$ 回転させてできる直線を ℓ_3 とし、それ
と円 $x^2 + y^2 = 1$ の交点を C とした。 ℓ_3 の方程式は、

$$y = \left\{ \tan \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \right\} x \\ = \frac{x}{\tan \theta}$$

であり、点 C の座標は、

$$\left(\cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right), \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \right) = (\sin \theta, \cos \theta)$$

である。よつて、 V は図(d)の斜線部を x 軸の周りに回転させてできる回転体の体積に等し
いので、領域を $0 \leq x \leq \sin \theta$ と $\sin \theta \leq x \leq 1$ の部分に分けて考える。前者の領域の回転体
が円錐になることに注意すれば、

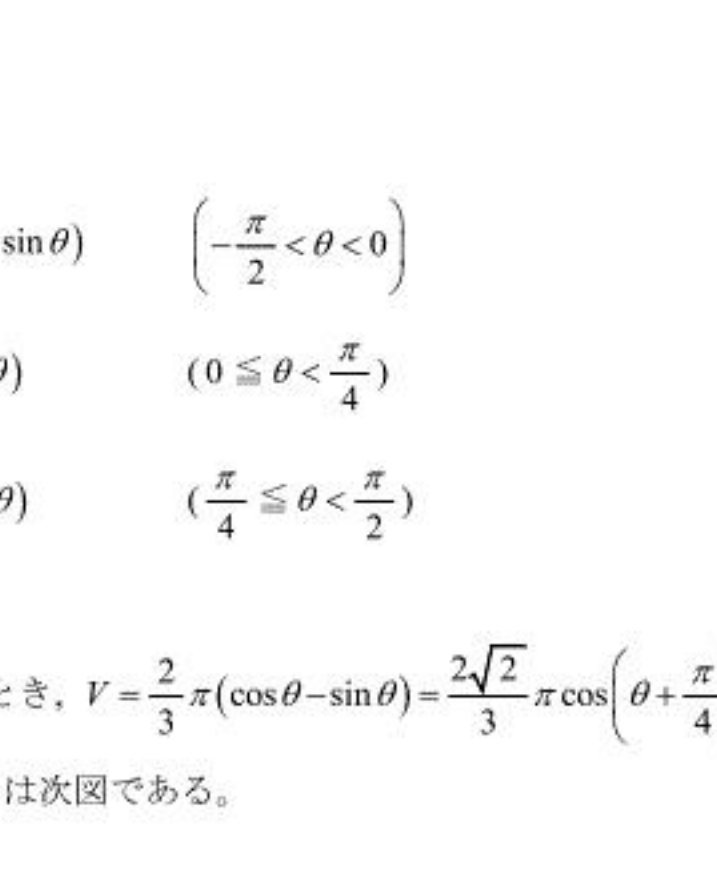
$$\begin{aligned} V &= \pi \cdot \cos^2 \theta \cdot \sin \theta \cdot \frac{1}{3} + \pi \int_{\sin \theta}^1 \left(\sqrt{1-x^2} \right)^2 dx \\ &= \frac{1}{3} \pi \cos^2 \theta \sin \theta + \pi \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_{\sin \theta}^1 \\ &= \frac{1}{3} \pi \cos^2 \theta \sin \theta + \frac{2}{3} \pi - \pi \sin \theta + \frac{1}{3} \pi \sin^3 \theta \\ &= \frac{2}{3} \pi (1 - \sin \theta) \end{aligned}$$

となる。ただし、 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ を用いた。[1]より、これは $\theta = 0$ でも成り立つ。

[3] $\frac{\pi}{4} \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ のとき

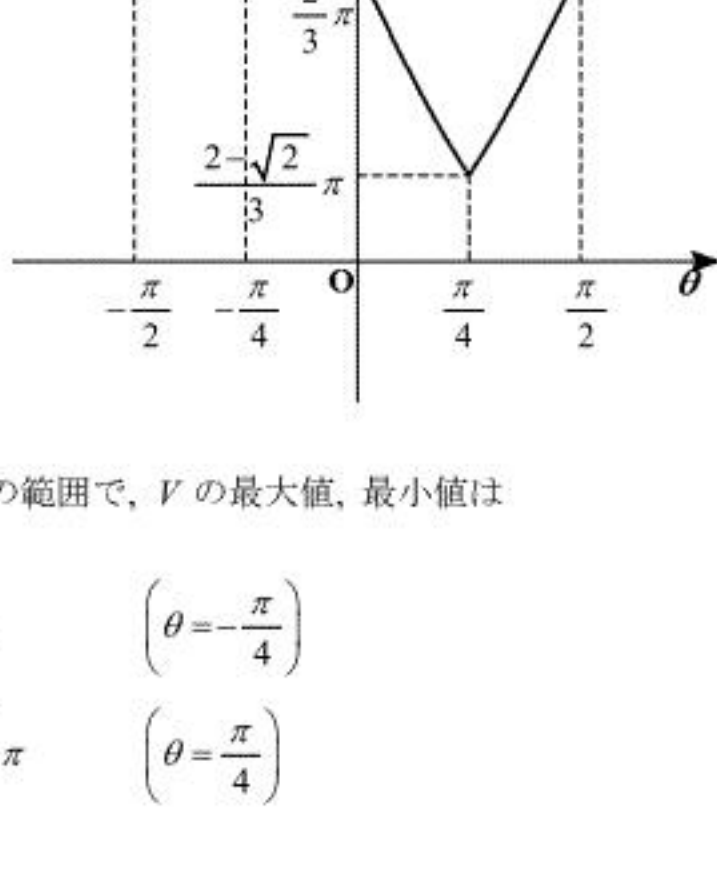
領域と直線を図示したものを(d)に示す。

(d)



(d)の斜線部を、直線 $y = (\tan \theta)x$ のまわりに回転させてできる回転体の体積は、次図(e)
の斜線部を、直線 $y = \frac{x}{\tan \theta}$ の周りに回転させてできる回転体の体積に等しい。

(e)



よつて、このときの V は、[2]で θ を $\frac{\pi}{2} - \theta$ としたものである。つまり、

$$\begin{aligned} V &= \frac{2}{3} \pi \left\{ 1 - \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \right\} \\ &= \frac{2}{3} \pi (1 - \cos \theta) \end{aligned}$$

以上から、

$$V = \begin{cases} \frac{2}{3} \pi (\cos \theta - \sin \theta) & \left(-\frac{\pi}{2} < \theta < 0 \right) \\ \frac{2}{3} \pi (1 - \sin \theta) & \left(0 \leq \theta < \frac{\pi}{4} \right) \\ \frac{2}{3} \pi (1 - \cos \theta) & \left(\frac{\pi}{4} \leq \theta < \frac{\pi}{2} \right) \end{cases}$$

である。 $-\frac{\pi}{2} < \theta < 0$ のとき、 $V = \frac{2}{3} \pi (\cos \theta - \sin \theta) = \frac{2\sqrt{2}}{3} \pi \cos \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right)$ である。

したがって、 V のグラフは次図である。

ゆえに、 $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ の範囲で、 V の最大値、最小値は

$$\text{最大値} \quad \frac{2\sqrt{2}}{3} \pi \quad \left(\theta = -\frac{\pi}{4} \right)$$

$$\text{最小値} \quad \frac{2-\sqrt{2}}{3} \pi \quad \left(\theta = \frac{\pi}{4} \right)$$

である。

$$(\text{答}) \quad \text{最大値} \quad \frac{2\sqrt{2}}{3} \pi$$

$$\text{最小値} \quad \frac{2-\sqrt{2}}{3} \pi$$