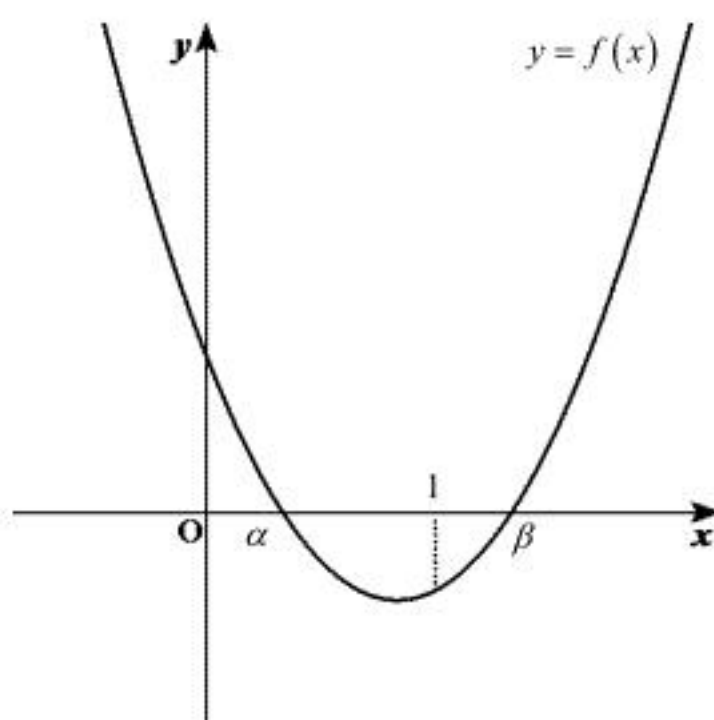


1

(1)

$f(x) = x^2 + (3k-2)x + 4k$ とおくと、 $f(x) = 0$ が解 $x = \alpha, \beta$ を持ち、 $0 < \alpha < 1 < \beta$ を満たすとき、 $y = f(x)$ のグラフは次図になる。



よって、 $f(0) > 0$ かつ $f(1) < 0$ を満たせばよいので、

$$\begin{cases} f(0) = 4k > 0 \\ f(1) = 7k - 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k > 0 \\ k < \frac{1}{7} \end{cases}$$

したがって、求める k の値の範囲は、

$$0 < k < \frac{1}{7}$$

(答) $0 < k < \frac{1}{7}$

(2)

$$x^2 + (3k-2)x + 4k = 0$$

の解が $x = \alpha, \beta$ であることから、解と係数の関係より α, β の間に、

$$\alpha + \beta = -3k + 2$$

$$\alpha\beta = 4k$$

の関係が成り立つ。よって、

$$\begin{aligned} (\beta - \alpha)^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta \\ &= (-3k + 2)^2 - 4 \cdot 4k \\ &= 9k^2 - 28k + 4 \end{aligned}$$

である。

(答) $(\beta - \alpha)^2 = 9k^2 - 28k + 4$

(3)

α, β の差が整数ならば、 $(\beta - \alpha)^2$ は平方数である。

$g(k) = (\beta - \alpha)^2 = 9k^2 - 28k + 4$ とおく。

$$g(k) = 9\left(k - \frac{14}{9}\right)^2 - \frac{160}{9}$$

と変形できる。よって、(1)より k の範囲は $0 < k < \frac{1}{7}$ であり、この範囲では $y = g(k)$ は単調減少する。

$$g(k) > g\left(\frac{1}{7}\right) = \frac{9}{49}$$

$$g(k) < g(0) = 4$$

なので

$$\Leftrightarrow \frac{9}{49} < g(k) < 4$$

となる。よって、 $g(k) = (\beta - \alpha)^2$ が平方数であるとき、

$$g(k) = 1$$

である。ゆえに、

$$9k^2 - 28k + 4 = 1$$

$$\Leftrightarrow (9k - 1)(k - 3) = 0$$

であり、 $0 < k < \frac{1}{7}$ なので、これを満たす k は $k = \frac{1}{9}$ である。 $k = \frac{1}{9}$ を問の2次方程式に代入すれば、

$$x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{4}{9} = 0$$

$$\Leftrightarrow 9x^2 - 15x + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (3x - 4)(3x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{3}, \frac{4}{3}$$

$0 < \alpha < 1 < \beta$ なので、

$$\alpha = \frac{1}{3}, \beta = \frac{4}{3}$$

である。

(答) $k = \frac{1}{9}, \alpha = \frac{1}{3}, \beta = \frac{4}{3}$

(1)

真数条件より、 $x > 0$ である。よって、

$$\begin{aligned} x + x^2 \log x &> 0 \\ \Leftrightarrow 1 + x \log x &> 0 \end{aligned}$$

であるので、 $f(x) = 1 + x \log x$ ($x > 0$) において、 $f(x) > 0$ を示す。

$$f'(x) = \log x + 1 = 0$$

とすると、

$$\log x = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1}$$

ゆえに、次の増減表が書ける。

x	(0)	...	e^{-1}	...
$f'(x)$			0	
$f(x)$		$\searrow$	$f(e^{-1})$	$\nearrow$

$$\begin{aligned} f(e^{-1}) &= 1 + e^{-1} \log e^{-1} \\ &= 1 - \frac{1}{e} > 0 \end{aligned}$$

より、 $f(x) > 0$ が示される。したがって、

$$x + x^2 \log x > 0$$

が成り立つ。

(証明終)

(2)

関数 $y = -x^2 \log x$ について、真数条件より $x > 0$ である。また、

$$\begin{aligned} y' &= -x(2 \log x + 1) \\ y'' &= -(2 \log x + 3) \end{aligned}$$

となるので、 $y' = 0$, $y'' = 0$ とすると、それぞれ $x = e^{-\frac{1}{2}}$, $x = e^{-\frac{3}{2}}$ である。

よって、次の増減表が書ける。

x	(0)	...	$e^{-\frac{3}{2}}$	...	$e^{-\frac{1}{2}}$	...
y'		+	+	+	0	-
y''		+	0	-	-	-
y		$\nearrow$	$\frac{3}{2}e^{-3}$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}e^{-1}$	$\searrow$

$y = -x^2 \log x = 0$ とすれば、 $x = 1$ である。また、

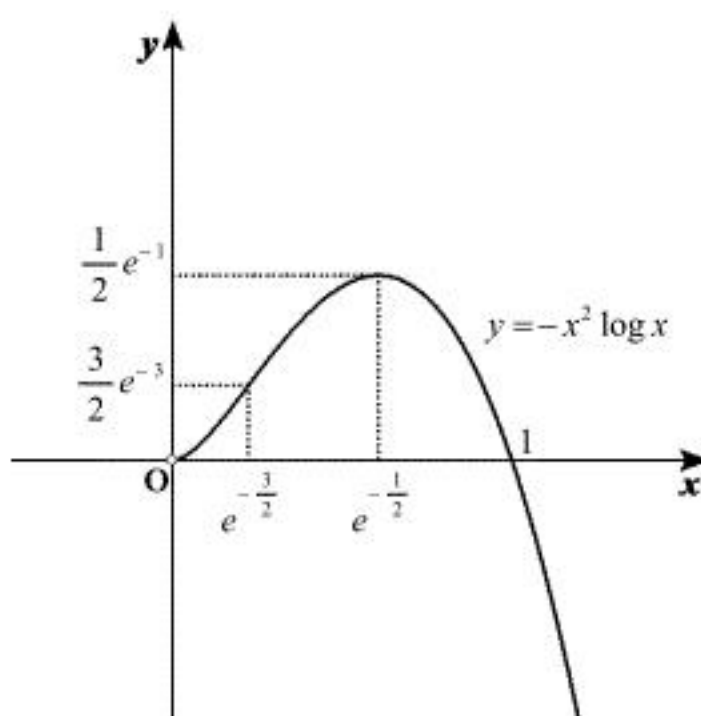
$$\lim_{x \rightarrow \infty} y = -\infty$$

である。さらに、 $0 < x < 1$ のとき、 $-x^2 \log x > 0$ であることと(1)より、

$$0 < -x^2 \log x < x$$

が成り立つが $x \rightarrow +0$ とすれば、はさみうちの原理から $-x^2 \log x \rightarrow 0$ である。

以上から、関数 $y = -x^2 \log x$ のグラフは次図である。



(答) 前図

点 I ($I = A, B, C, D, E, F, G, H$) が回転によって移動した後の点を I' と表すことにする。

(1)

$\overrightarrow{OF} = (1, 1, 1)$ なので、

$$|\overrightarrow{OF}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

xy 平面上の直線 $y = -x$ は原点を通るので、この直線のまわりに点を回転しても、原点からの距離は変わらない。よって、

$$\overrightarrow{OF'} = (0, 0, \sqrt{3})$$

である。 $\overrightarrow{OF}$ と $\overrightarrow{OF'}$ のなす角を θ とすると、

$$\cos \theta = \frac{\overrightarrow{OF} \cdot \overrightarrow{OF'}}{|\overrightarrow{OF}| |\overrightarrow{OF'}|} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

である。 $\overrightarrow{OB} = (1, 1, 0)$ なので、 $\overrightarrow{OB'}$ の x, y 成分は一致する。そこで、

$$\overrightarrow{OB'} = (b, b, k) \quad (k > 0)$$

とおくと、

$$|\overrightarrow{OB'}| = |\overrightarrow{OB}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2} \quad \dots \textcircled{1}$$

であり、さらに、 $\overrightarrow{OB}$ と $\overrightarrow{OB'}$ のなす角は θ である。ゆえに、

$$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OB'} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cos \theta = 2 \cos \theta \quad \dots \textcircled{2}$$

が成り立つ。 $\textcircled{1}$ より、

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{OB'}|^2 &= b^2 + b^2 + k^2 \\ &= 2b^2 + k^2 = 2 \quad \dots \textcircled{3} \end{aligned}$$

$\textcircled{2}$ より、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OB'} &= 1 \cdot b + 1 \cdot b + 0 \cdot k \\ &= 2b = 2 \cos \theta \end{aligned}$$

$$\therefore b = \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

これを $\textcircled{3}$ に代入して整理すると、 $k > 0$ より、

$$k = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

したがって、

$$\overrightarrow{OB'} = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3} \right)$$

である。

$$(\text{答}) \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3} \right)$$

(2)

$$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BF}$$

である。これを直線 $y = -x$ まわりに回転させたものを考えるので、

$$\overrightarrow{A'G'} = \overrightarrow{A'C'} + \overrightarrow{B'F'}$$

の成分を求める。

$\overrightarrow{OA} = (1, 0, 0)$, $\overrightarrow{OC} = (0, 1, 0)$ より $\overrightarrow{AC} = (-1, 1, 0)$ であるので、直線 AC は直線 $y = -x$ に平行である。よって、 $\overrightarrow{AC}$ は直線 $y = -x$ まわりに回転してもその成分は変化しない。つまり、

$$\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{AC} = (-1, 1, 0)$$

である。また、(1) より、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{B'F'} &= \overrightarrow{OF'} - \overrightarrow{OB'} \\ &= (0, 0, \sqrt{3}) - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3} \right) \\ &= \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \end{aligned}$$

である。したがって、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{A'G'} &= (-1, 1, 0) + \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \\ &= \left(-1 - \frac{\sqrt{3}}{3}, 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \left(-1 - \frac{\sqrt{3}}{3}, 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3} \right)$$

4

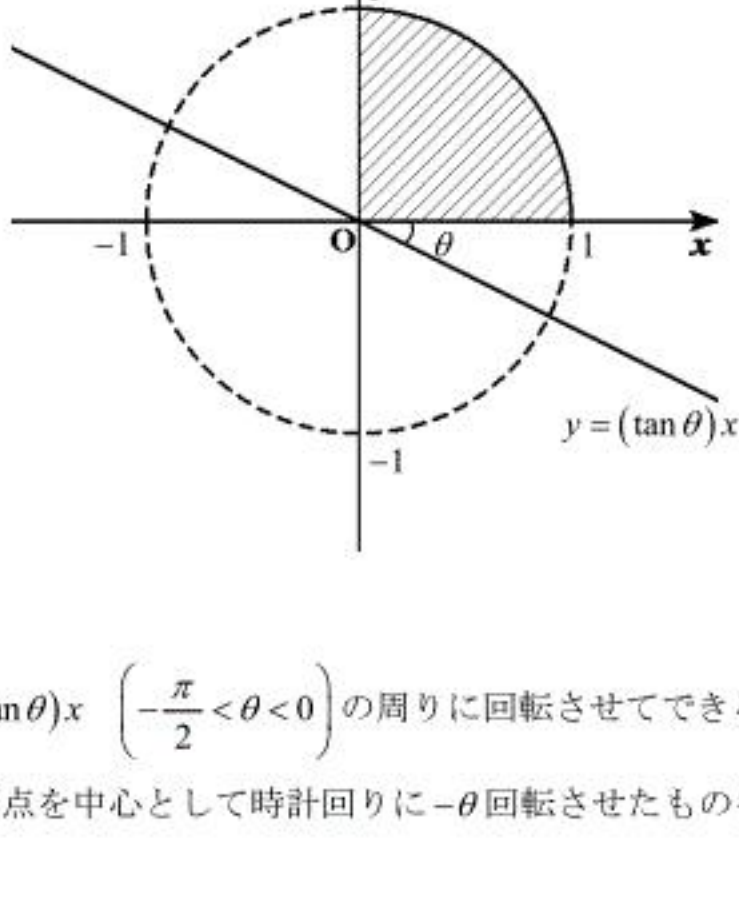
(1)

連立不等式

$$x^2 + y^2 \leq 1, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0$$

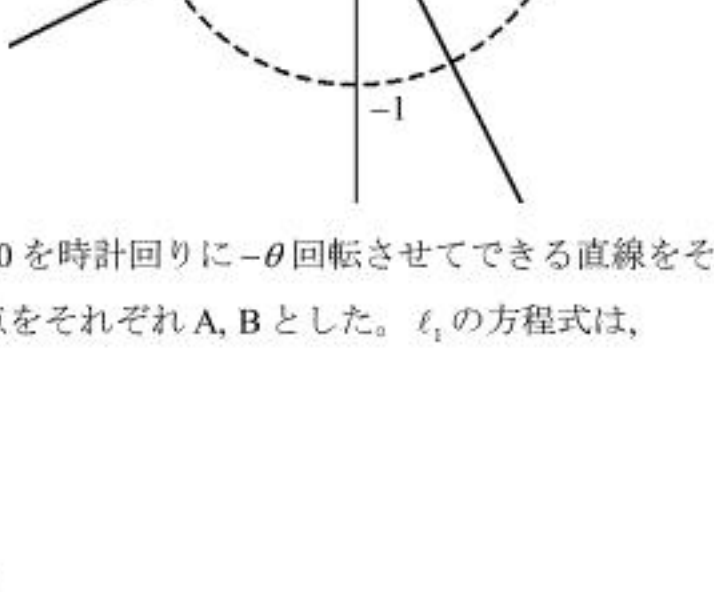
の表す領域と直線 $y = (\tan \theta)x$ を図示したものを次図(a)に示す。領域は図の斜線部である。ただし、境界線は全て含む。

(a)



この領域を直線 $y = (\tan \theta)x$ $\left(-\frac{\pi}{2} < \theta < 0\right)$ の周りに回転させてできる回転体の体積を求め
るため、図(a)全体を原点を中心として時計回りに $-\theta$ 回転させたものを考える。それを次図
(b)に示す。

(b)



ただし、直線 $x=0, y=0$ を時計回りに $-\theta$ 回転させてできる直線をそれぞれ ℓ_1, ℓ_2 とし、それ
らと円 $x^2 + y^2 = 1$ の交点をそれぞれ A, B とした。 ℓ_1 の方程式は、

$$y = \left\{ \tan(-\theta) \right\} x \\ = -(\tan \theta)x$$

ℓ_2 の方程式は、

$$y = \left\{ \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \right\} x \\ = \frac{x}{\tan \theta}$$

また、点 A, B の x 座標 A_x, B_x はそれぞれ、

$$A_x = \cos(-\theta) = \cos \theta$$

$$B_x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta$$

さらに、円 $x^2 + y^2 = 1$ の $y \geq 0$ の部分は $y = \sqrt{1-x^2}$ と表せる。したがって、 V は図(b)の斜線部
を x 軸周りに回転させてできる回転体の体積に等しいので、

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{\sin \theta}^0 \left\{ \left(\sqrt{1-x^2} \right)^2 - \left(\frac{x}{\tan \theta} \right)^2 \right\} dx + \pi \int_0^{\cos \theta} \left\{ \left(\sqrt{1-x^2} \right)^2 - \left((\tan \theta)x \right)^2 \right\} dx \\ &= \pi \int_{\sin \theta}^0 \left(1-x^2 - \frac{x^2}{\tan^2 \theta} \right) dx + \pi \int_0^{\cos \theta} \left(1-x^2 - (\tan^2 \theta)x^2 \right) dx \\ &= \pi \int_{\sin \theta}^0 \left(1-x^2 \left(1 + \frac{1}{\tan^2 \theta} \right) \right) dx + \pi \int_0^{\cos \theta} \left(1-x^2 (1 + \tan^2 \theta) \right) dx \\ &= \pi \int_{\sin \theta}^0 \left(1 - \frac{x^2}{\sin^2 \theta} \right) dx + \pi \int_0^{\cos \theta} \left(1 - \frac{x^2}{\cos^2 \theta} \right) dx \\ &\quad \left(\because \begin{cases} 1 + \frac{1}{\tan^2 \theta} = \frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 \theta} + \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} = \frac{1}{\sin^2 \theta} \\ 1 + \tan^2 \theta = \frac{\cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} + \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta} \end{cases} \right) \\ &= \pi \left[x - \frac{x^3}{3 \sin^2 \theta} \right]_{\sin \theta}^0 + \pi \left[x - \frac{x^3}{3 \cos^2 \theta} \right]_0^{\cos \theta} \\ &= \frac{2}{3} \pi (\cos \theta - \sin \theta) \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad V = \frac{2}{3} \pi (\cos \theta - \sin \theta)$$

(2)

$0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ のとき、 θ の値によって

$$[1] \theta = 0 \quad [2] 0 < \theta < \frac{\pi}{4} \quad [3] \frac{\pi}{4} \leq \theta < \frac{\pi}{2}$$

と場合分けをして考える。

[1] $\theta = 0$ のとき

V は、領域

$$x^2 + y^2 \leq 1, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0$$

を x 軸周りに回転させてできる回転体、つまり半径 1 の半球の体積なので、

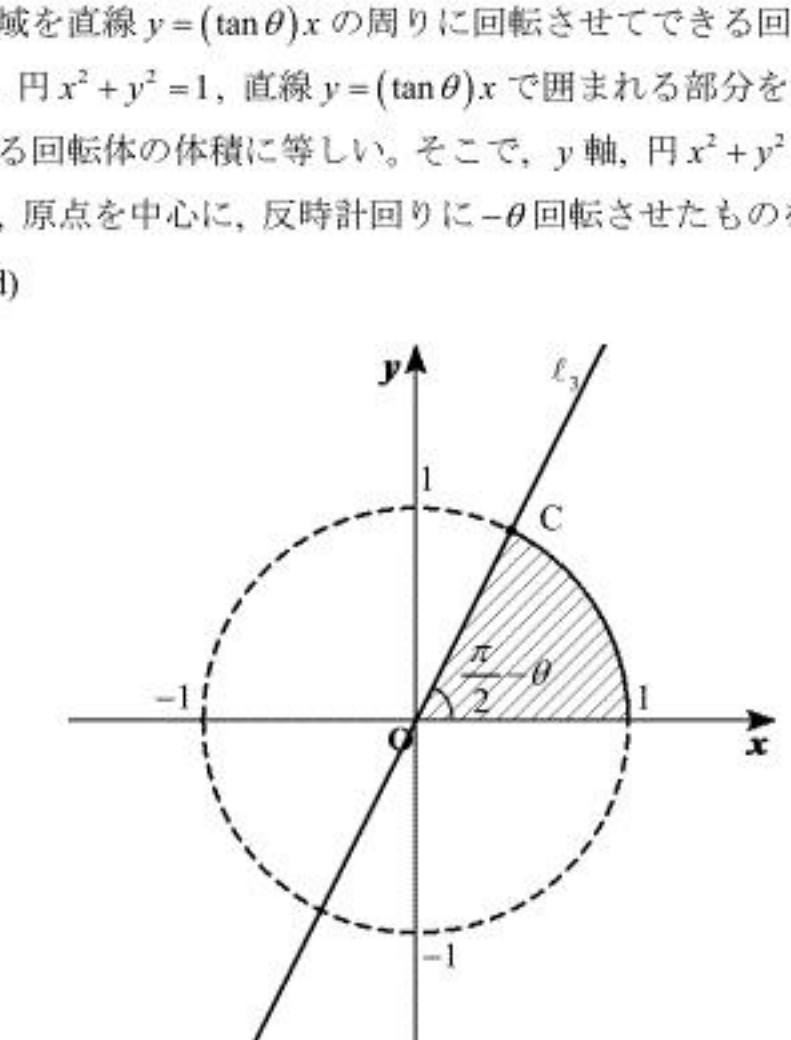
$$\frac{4}{3} \pi \cdot 1^3 \times \frac{1}{2} = \frac{2}{3} \pi$$

である。

[2] $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ のとき

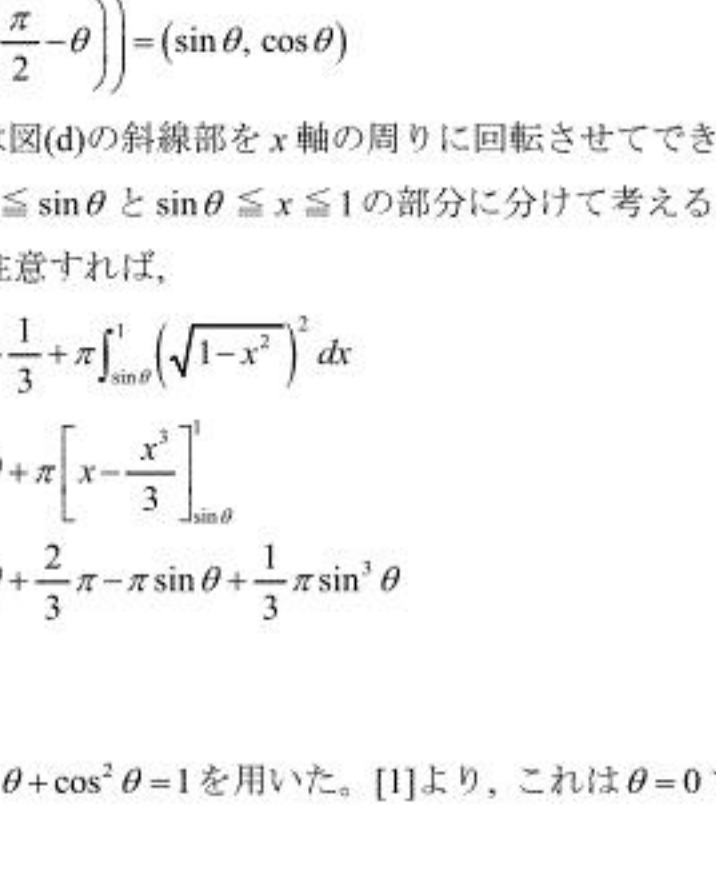
(1)と同様に、領域と直線を図示したものを(c)に示す。ただし、 $y = (\tan 2\theta)x$ も共に示した。

(c)



いま、 x 軸、円 $x^2 + y^2 = 1$ 、直線 $y = (\tan \theta)x$ で囲まれる部分と、円 $x^2 + y^2 = 1$ 、直線
 $y = (\tan \theta)x$ 、直線 $y = (\tan 2\theta)x$ で囲まれる部分は、直線 $y = (\tan \theta)x$ に関して対称なので、
これらの 2 つの領域を直線 $y = (\tan \theta)x$ の周りに回転させてできる回転体は一致する。
よって、 V は y 軸、円 $x^2 + y^2 = 1$ 、直線 $y = (\tan \theta)x$ で囲まれる部分を直線 $y = (\tan \theta)x$ 周
りに回転させてできる回転体の体積に等しい。そこで、 y 軸、円 $x^2 + y^2 = 1$ 、直線 $y = (\tan \theta)x$
で囲まれる部分を、原点を中心に、反時計回りに $-\theta$ 回転させたものを図(d)に示す。

(d)



ただし、直線 $x=0$ を減点を中心に反時計回りに $-\theta$ 回転させてできる直線を ℓ_3 とし、それ
と円 $x^2 + y^2 = 1$ の交点を C とした。 ℓ_3 の方程式は、

$$y = \left\{ \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \right\} x \\ = \frac{x}{\tan \theta}$$

であり、点 C の座標は、

$$\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right), \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \right) = (\sin \theta, \cos \theta)$$

である。よって、 V は図(d)の斜線部を x 軸の周りに回転させてできる回転体の体積に等し
いので、領域を $0 \leq x \leq \sin \theta$ と $\sin \theta \leq x \leq 1$ の部分に分けて考える。前者の領域の回転体
が円錐になることに注意すれば、

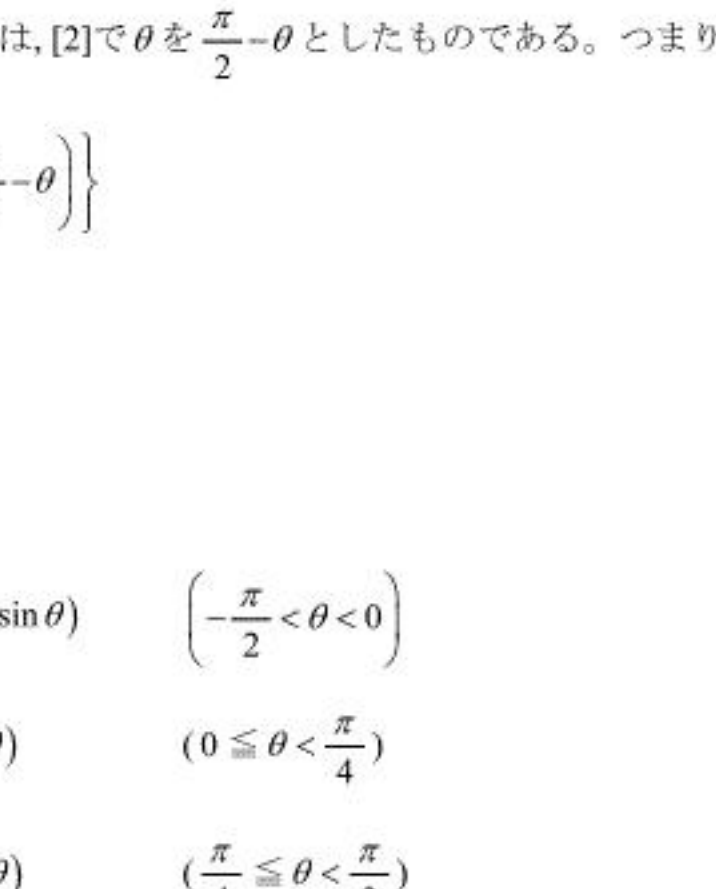
$$\begin{aligned} V &= \pi \cdot \cos^2 \theta \cdot \sin \theta \cdot \frac{1}{3} + \pi \int_{\sin \theta}^1 \left(\sqrt{1-x^2} \right)^2 dx \\ &= \frac{1}{3} \pi \cos^2 \theta \sin \theta + \pi \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_{\sin \theta}^1 \\ &= \frac{1}{3} \pi \cos^2 \theta \sin \theta + \frac{2}{3} \pi - \pi \sin \theta + \frac{1}{3} \pi \sin^3 \theta \\ &= \frac{2}{3} \pi (1 - \sin \theta) \end{aligned}$$

となる。ただし、 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ を用いた。[1]より、これは $\theta = 0$ でも成り立つ。

[3] $\frac{\pi}{4} \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ のとき

領域と直線を図示したものを(d)に示す。

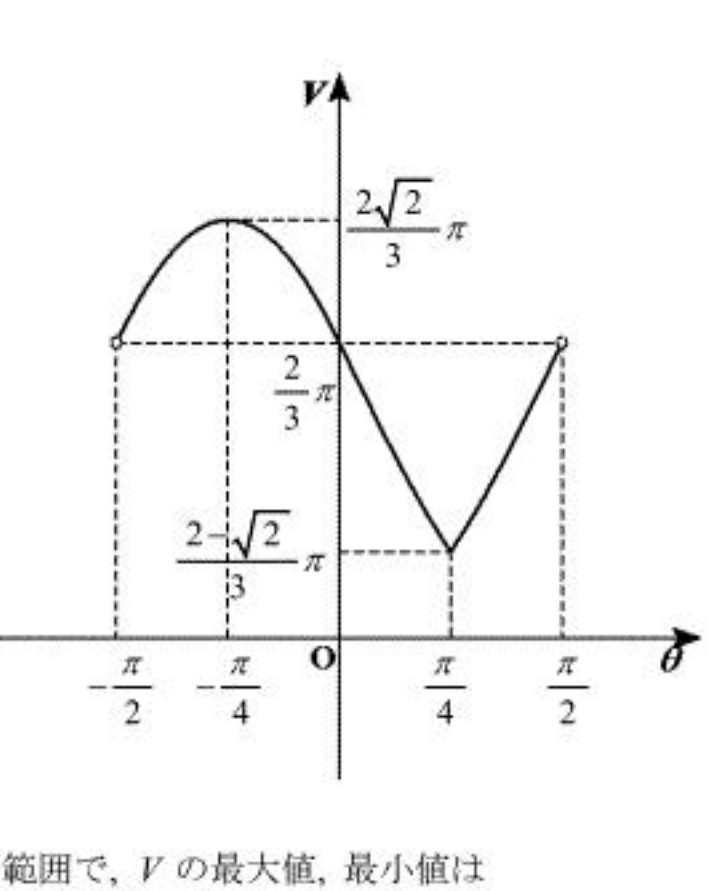
(d)



(d)の斜線部を、直線 $y = (\tan \theta)x$ のまわりに回転させてできる回転体の体積は、次図(e)

の斜線部を、直線 $y = \frac{x}{\tan \theta}$ の周りに回転させてできる回転体の体積に等しい。

(e)



よって、このときの V は、[2]で θ を $\frac{\pi}{2} - \theta$ としたものである。つまり、

$$\begin{aligned} V &= \frac{2}{3} \pi \left\{ 1 - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \right\} \\ &= \frac{2}{3} \pi (1 - \cos \theta) \end{aligned}$$

以上から、

$$V = \begin{cases} \frac{2}{3} \pi (\cos \theta - \sin \theta) & \left(-\frac{\pi}{2} < \theta < 0 \right) \\ \frac{2}{3} \pi (1 - \sin \theta) & \left(0 \leq \theta < \frac{\pi}{4} \right) \\ \frac{2}{3} \pi (1 - \cos \theta) & \left(\frac{\pi}{4} \leq \theta < \frac{\pi}{2} \right) \end{cases}$$

である。 $-\frac{\pi}{2} < \theta < 0$ のとき、 $V = \frac{2}{3} \pi (\cos \theta - \sin \theta) = \frac{2\sqrt{2}}{3} \pi \cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$ である。

したがって、 V のグラフは次図である。

ゆえに、 $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ の範囲で、 V の最大値、最小値は

$$\begin{aligned} \text{最大値} & \quad \frac{2\sqrt{2}}{3} \pi & \left(\theta = -\frac{\pi}{4} \right) \\ \text{最小値} & \quad \frac{2-\sqrt{2}}{3} \pi & \left(\theta = \frac{\pi}{4} \right) \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \text{最大値} \quad \frac{2\sqrt{2}}{3} \pi$$

$$\text{最小値} \quad \frac{2-\sqrt{2}}{3} \pi$$