

(1)

$$\begin{aligned}
 a_{n+1} &= a_n 2^{6n^2} \\
 \Leftrightarrow \log_2 a_{n+1} &= \log_2 a_n + 6n^2 \\
 \Leftrightarrow b_{n+1} &= b_n + 6n^2
 \end{aligned}$$

より, $n \geq 2$ で

$$\begin{aligned}
 b_n &= b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 6k^2 \\
 &= \log_2 2 + 6 \cdot \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \\
 &= 2n^3 - 3n^2 + n + 1
 \end{aligned}$$

である。これは $n=1$ でも成り立つ。

$$(\text{答}) \quad b_n = 2n^3 - 3n^2 + n + 1 \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

(2)

(1)より,

$$a_n = 2^{\log_2 a_n} = 2^{b_n} = 2^{2n^3 - 3n^2 + n + 1}$$

である。

$$(\text{答}) \quad a_n = 2^{2n^3 - 3n^2 + n + 1} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

(3)

(2)より,

$$\begin{aligned}
 \log_{10} a_{10} &= \log_{10} 2^{2 \cdot 10^3 - 3 \cdot 10^2 + 10 + 1} \\
 &= (2 \cdot 10^3 - 3 \cdot 10^2 + 10 + 1) \cdot \log_{10} 2 \\
 &= 1711 \times 0.3010 \\
 &= 515.011
 \end{aligned}$$

であるから,

$$10^{515} < a_{10} < 10^{516}$$

より, a_{10} は 516 桁である。

$$(\text{答}) \quad 516 \text{ 桁}$$

(1)

$$\frac{A+B+C}{2} = \frac{\pi}{2}$$

より,

$$\sin \frac{B}{2} = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{A+C}{2} \right) = \cos \frac{A+C}{2}$$

$$\cos \frac{B}{2} = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{A+C}{2} \right) = \sin \frac{A+C}{2}$$

である。

(証明終)

(2)

 $\triangle ABC$ の外接円の半径を R とすると, 正弦定理より

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{2R} = \sin A, \frac{b}{2R} = \sin B, \frac{c}{2R} = \sin C$$

が成り立つので,

$$a+c=2b$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{2R} + \frac{c}{2R} = 2 \cdot \frac{b}{2R}$$

$$\Leftrightarrow \sin A + \sin C = 2 \sin B$$

が成立する。

(証明終)

(3)

(1), (2)より,

$$\sin A + \sin C = 2 \sin \frac{A+C}{2} \cos \frac{A-C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin B = \cos \frac{B}{2} \cos \frac{A-C}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2} = \cos \frac{B}{2} \cos \frac{A-C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos \frac{A-C}{2} = 2 \sin \frac{B}{2} \left(\because \cos \frac{B}{2} \neq 0 \right)$$

である。これと, (1)より

$$\cos \frac{A+C}{2} = \sin \frac{B}{2}$$

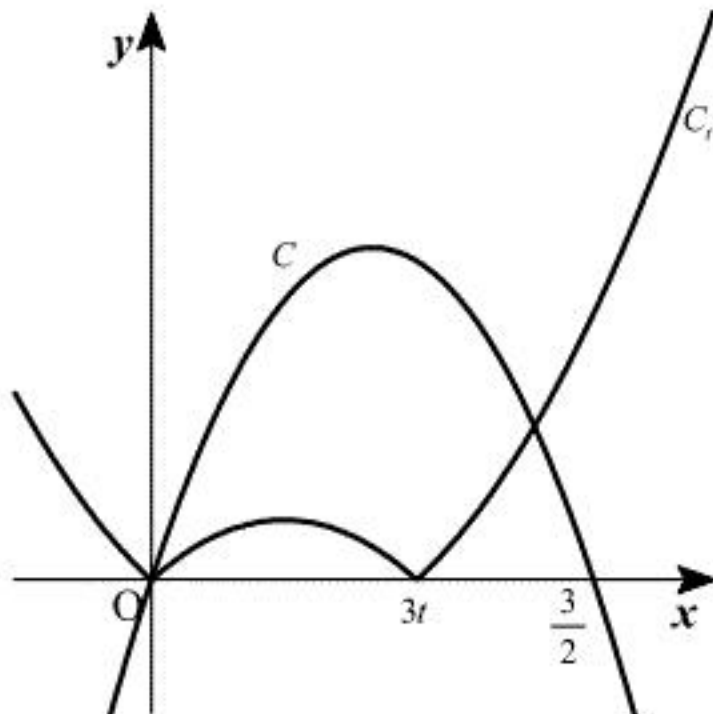
を用いれば,

$$\begin{aligned} \tan \frac{A}{2} \tan \frac{C}{2} &= \frac{\sin \frac{A}{2} \sin \frac{C}{2}}{\cos \frac{A}{2} \cos \frac{C}{2}} \\ &= -\frac{\cos \frac{A+C}{2} - \cos \frac{A-C}{2}}{\cos \frac{A+C}{2} + \cos \frac{A-C}{2}} \\ &= -\frac{\sin \frac{B}{2} - 2 \sin \frac{B}{2}}{\sin \frac{B}{2} + 2 \sin \frac{B}{2}} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

と求まる。

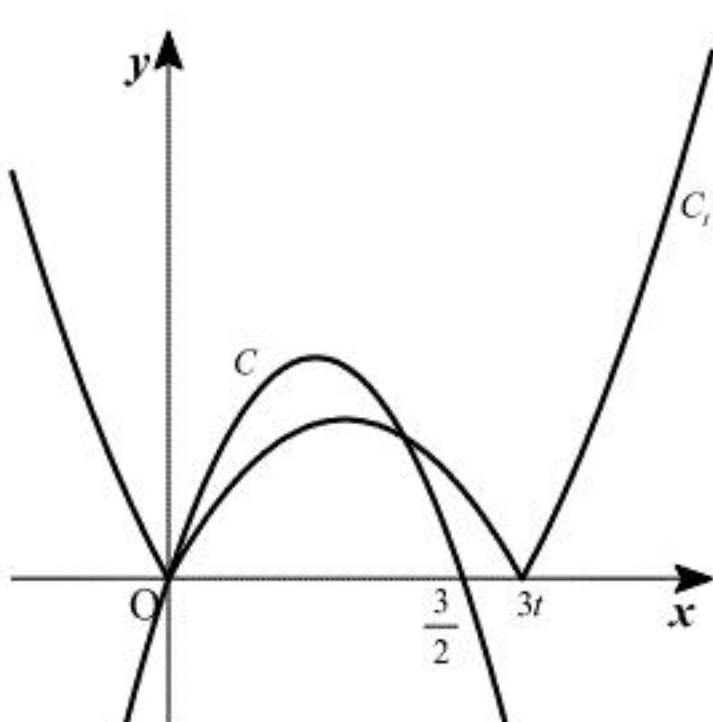
(答) $\frac{1}{3}$

(1)

[1] $0 \leq t < \frac{1}{2}$ のとき上図のようになるので、2 曲線 C, C_t の交点の x 座標は、

$$\begin{aligned} -2x^2 + 3x &= x^2 - 3tx \\ \Leftrightarrow 3x^2 - 3tx - 3x &= 0 \\ \Leftrightarrow x\{x - (t+1)\} &= 0 \\ \therefore x &= 0, t+1 \end{aligned}$$

となる。

[2] $\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{2}{3}$ のとき上図のようになるので、2 曲線 C, C_t の交点の x 座標は、

$$\begin{aligned} -2x^2 + 3x &= -x^2 + 3tx \\ \Leftrightarrow x^2 + 3tx - 3x &= 0 \\ \Leftrightarrow x\{x + (3t-3)\} &= 0 \\ \therefore x &= 0, -3t+3 \end{aligned}$$

となる。

(答) $0 \leq t < \frac{1}{2}$ のとき $x=0, t+1$ $\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{2}{3}$ のとき $x=0, -3t+3$

(2)

[1] $0 \leq t < \frac{1}{2}$ のとき

$$\begin{aligned} S(t) &= \int_0^{3t} \{(-2x^2 + 3x) - (-x^2 + 3tx)\} dx + \int_{3t}^{t+1} \{(-2x^2 + 3x) - (x^2 - 3tx)\} dx \\ &= \int_0^{3t} \{-x^2 + (-3t+3)x\} dx + \int_{3t}^{t+1} \{-3x^2 + 3(t+1)x\} dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}(-3t+3)x^2 \right]_0^{3t} + \left[-x^3 + \frac{3}{2}(t+1)x^2 \right]_{3t}^{t+1} \\ &= -\frac{17}{2}t^3 + \frac{3}{2}t^2 + \frac{3}{2}t + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる。

[2] $\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{2}{3}$ のとき

$$\begin{aligned} S(t) &= \int_0^{-3t+3} \{(-2x^2 + 3x) - (-x^2 + 3tx)\} dx \\ &= \int_0^{-3t+3} \{-x^2 + (-3t+3)x\} dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}(-3t+3)x^2 \right]_0^{-3t+3} \\ &= -\frac{1}{3}(-3t+3)^3 + \frac{1}{2}(-3t+3)^3 \\ &= \frac{1}{6}(-3t+3)^3 \\ &= -\frac{9}{2}(t-1)^3 \end{aligned}$$

となる。

(答) $0 \leq t < \frac{1}{2}$ のとき $S(t) = -\frac{17}{2}t^3 + \frac{3}{2}t^2 + \frac{3}{2}t + \frac{1}{2}$ $\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{2}{3}$ のとき $S(t) = -\frac{9}{2}(t-1)^3$

(3)

[1] $0 \leq t < \frac{1}{2}$ のとき

$$S'(t) = -\frac{51}{2}t^2 + 3t + \frac{3}{2}$$

であり、ここですべての実数 t について

$$-\frac{51}{2}t^2 + 3t + \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1+3\sqrt{2}}{17}$$

となるが、 $1 < \sqrt{2} < 2$ より

$$\frac{1-3\sqrt{2}}{17} < 0, 0 < \frac{1+3\sqrt{2}}{17} < \frac{1}{2}$$

となるため、 $0 \leq t < \frac{1}{2}$ の範囲では

$$S'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1+3\sqrt{2}}{17}$$

である。

[2] $\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{2}{3}$ のとき

$$S'(t) = -\frac{27}{2}(t-1)^2 < 0$$

である。

以上[1],[2]より、 $S(t)$ の増減表は次のようになる。

t	0	...	$\frac{1+3\sqrt{2}}{17}$	...	$\frac{1}{2}$	...	$\frac{2}{3}$
$S'(t)$		+	0	-		-	
$S(t)$		↗	最大	↘		↘	

増減表より、 $S(t)$ を最大にする t は、

$$t = \frac{1+3\sqrt{2}}{17}$$

となる。

(答) $t = \frac{1+3\sqrt{2}}{17}$

(1)

A, B ともに, 1 回目で赤球を取り出す確率は, $\frac{{}_3C_1}{{}_5C_1} = \frac{3}{5}$ であるから, 求める確率は

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{25}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{9}{25}$$

(2)

A, B ともに, 1 回目で赤球を取り出した場合, 残りの球 4 個中, 赤球は 2 個になっているので, 2 回目に赤球を 2 個取り出す確率は,

$$\frac{{}_2C_1}{{}_4C_1} \cdot \frac{{}_2C_1}{{}_4C_1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

である。したがって, (1) の結果と合わせ, 求める確率は,

$$\frac{9}{25} \cdot \frac{1}{4} = \frac{9}{100}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{9}{100}$$

(3)

1 回目, 2 回目とも赤球を 2 個取り出した場合, 3 回目で取り出された 2 個の球がすべて赤球である確率は, (2) と同様に考えると,

$$\frac{{}_1C_1}{{}_3C_1} \cdot \frac{{}_1C_1}{{}_3C_1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9} \quad \cdots \textcircled{1}$$

である。

以下, 初めて白球を取り出すまでの回数で場合分けをして考える。

[1] 1 回目で初めて白球を取り出すとき

これは, 「1 回目の操作で取り出された 2 個の球がともに赤球である」という事象の余事象の確率を考えればよいので, (1) より

$$1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$$

となる。

[2] 2 回目で初めて白球を取り出すとき

[1] と同様に考えると, 1 回目の操作で 2 個とも赤球であり, かつ「2 回目の操作で取り出された球が 2 個とも赤球」でなければよいので, (1), (2) より, 求める確率は

$$\frac{9}{25} \cdot \left(1 - \frac{1}{4} \right) = \frac{27}{100}$$

となる。

[3] 3 回目で初めて白球を取り出すとき

[1], [2] と同様に考えると, (2), ① より, 求める確率は

$$\frac{9}{100} \cdot \left(1 - \frac{1}{9} \right) = \frac{8}{100} = \frac{2}{25}$$

となる。

[4] 4 回目で初めて白球を取り出すとき

1 回目, 2 回目, 3 回目で取り出した 2 個の球がどれも赤球であるときに, この事象は起こるが, このとき, 残りの球は A, B とも白球 2 個なので, 3 回目まですべて赤球なら, 必ず 4 回目は白球が取り出される。したがって, (2), ① より, 求める確率は

$$\frac{9}{100} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{100}$$

となる。

以上, [1], [2], [3], [4] より, 求める期待値は

$$1 \cdot \frac{16}{25} + 2 \cdot \frac{27}{100} + 3 \cdot \frac{2}{25} + 4 \cdot \frac{1}{100} = \frac{73}{50}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{73}{50}$$