

1

(1)

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n 2^{6n^2} \\ \Leftrightarrow \log_2 a_{n+1} &= \log_2 a_n + 6n^2 \\ \Leftrightarrow b_{n+1} &= b_n + 6n^2 \end{aligned}$$

より, $n \geq 2$ で

$$\begin{aligned} b_n &= b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 6k^2 \\ &= \log_2 2 + 6 \cdot \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \\ &= 2n^3 - 3n^2 + n + 1 \end{aligned}$$

である。これは $n=1$ でも成り立つ。

$$(\text{答}) \quad b_n = 2n^3 - 3n^2 + n + 1 \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

(2)

(1)より,

$$a_n = 2^{\log_2 a_n} = 2^{b_n} = 2^{2n^3 - 3n^2 + n + 1}$$

である。

$$(\text{答}) \quad a_n = 2^{2n^3 - 3n^2 + n + 1} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

(3)

(2)より,

$$\begin{aligned} \log_{10} a_{10} &= \log_{10} 2^{2 \cdot 10^3 - 3 \cdot 10^2 + 10 + 1} \\ &= (2 \cdot 10^3 - 3 \cdot 10^2 + 10 + 1) \cdot \log_{10} 2 \\ &= 1711 \times 0.3010 \\ &= 515.011 \end{aligned}$$

であるから,

$$10^{515} < a_{10} < 10^{516}$$

より, a_{10} は 516 桁である。

(答) 516 桁

(1)

$$\frac{A+B+C}{2} = \frac{\pi}{2}$$

より,

$$\begin{aligned}\sin \frac{B}{2} &= \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{A+C}{2} \right) = \cos \frac{A+C}{2} \\ \cos \frac{B}{2} &= \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{A+C}{2} \right) = \sin \frac{A+C}{2}\end{aligned}$$

である。

(証明終)

(2)

 $\triangle ABC$ の外接円の半径を R とすると, 正弦定理より

$$\begin{aligned}\frac{a}{\sin A} &= \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \\ \Leftrightarrow \frac{a}{2R} &= \sin A, \frac{b}{2R} = \sin B, \frac{c}{2R} = \sin C\end{aligned}$$

が成り立つので,

$$\begin{aligned}a+c &= 2b \\ \Leftrightarrow \frac{a}{2R} + \frac{c}{2R} &= 2 \cdot \frac{b}{2R} \\ \Leftrightarrow \sin A + \sin C &= 2 \sin B\end{aligned}$$

が成立する。

(証明終)

(3)

(1), (2)より,

$$\begin{aligned}\sin A + \sin C &= 2 \sin \frac{A+C}{2} \cos \frac{A-C}{2} \\ \Leftrightarrow \sin B &= \cos \frac{B}{2} \cos \frac{A-C}{2} \\ \Leftrightarrow 2 \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2} &= \cos \frac{B}{2} \cos \frac{A-C}{2} \\ \Leftrightarrow \cos \frac{A-C}{2} &= 2 \sin \frac{B}{2}\end{aligned}$$

である。これと, (1)より

$$\cos \frac{A+C}{2} = \sin \frac{B}{2}$$

を用いれば,

$$\begin{aligned}\tan \frac{A}{2} \tan \frac{C}{2} &= \frac{\sin \frac{A}{2} \sin \frac{C}{2}}{\cos \frac{A}{2} \cos \frac{C}{2}} \\ &= -\frac{\cos \frac{A+C}{2} - \cos \frac{A-C}{2}}{\cos \frac{A+C}{2} + \cos \frac{A-C}{2}} \\ &= -\frac{\sin \frac{B}{2} - 2 \sin \frac{B}{2}}{\sin \frac{B}{2} + 2 \sin \frac{B}{2}} \\ &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

と求まる。

(答) $\frac{1}{3}$

(1)

A, B ともに, 1 回目で赤球を取り出す確率は, $\frac{{}_3C_1}{{}_5C_1} = \frac{3}{5}$ であるから, 求める確率は

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{25}$$

である。

$$\text{(答)} \quad \frac{9}{25}$$

(2)

A, B ともに, 1 回目で赤球を取り出した場合, 残りの球 4 個中, 赤球は 2 個になっているので, 2 回目に赤球を 2 個取り出す確率は,

$$\frac{{}_2C_1}{{}_4C_1} \cdot \frac{{}_2C_1}{{}_4C_1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

である。したがって, (1) の結果と合わせ, 求める確率は,

$$\frac{9}{25} \cdot \frac{1}{4} = \frac{9}{100}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad \frac{9}{100}$$

(3)

1 回目, 2 回目とも赤球を 2 個取り出した場合, 3 回目で取り出された 2 個の球がすべて赤球である確率は, (2) と同様に考えると,

$$\frac{{}_1C_1}{{}_3C_1} \cdot \frac{{}_1C_1}{{}_3C_1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9} \quad \dots \textcircled{1}$$

である。

以下, 初めて白球を取り出すまでの回数で場合分けをして考える。

[1] 1 回目で初めて白球を取り出すとき

これは, 「1 回目の操作で取り出された 2 個の球がともに赤球である」という事象の余事象の確率を考えればよいので, (1) より

$$1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$$

となる。

[2] 2 回目で初めて白球を取り出すとき

[1] と同様に考えると, 1 回目の操作で 2 個とも赤球であり, かつ「2 回目の操作で取り出された球が 2 個とも赤球」でなければよいので, (1), (2) より, 求める確率は

$$\frac{9}{25} \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{27}{100}$$

となる。

[3] 3 回目で初めて白球を取り出すとき

[1], [2] と同様に考えると, (2), ① より, 求める確率は

$$\frac{9}{100} \cdot \left(1 - \frac{1}{9}\right) = \frac{8}{100} = \frac{2}{25}$$

となる。

[4] 4 回目で初めて白球を取り出すとき

1 回目, 2 回目, 3 回目で取り出した 2 個の球がどれも赤球であるときに, この事象は起こるが, このとき, 残りの球は A, B とも白球 2 個なので, 3 回目まですべて赤球なら, 必ず 4 回目は白球が取り出される。したがって, (2), ① より, 求める確率は

$$\frac{9}{100} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{100}$$

となる。

以上, [1], [2], [3], [4] より, 求める期待値は

$$1 \cdot \frac{16}{25} + 2 \cdot \frac{27}{100} + 3 \cdot \frac{2}{25} + 4 \cdot \frac{1}{100} = \frac{73}{50}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad \frac{73}{50}$$