

1

(1)

$$\frac{A+B+C}{2} = \frac{\pi}{2}$$

より,

$$\begin{aligned}\sin \frac{B}{2} &= \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{A+C}{2} \right) = \cos \frac{A+C}{2} \\ \cos \frac{B}{2} &= \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{A+C}{2} \right) = \sin \frac{A+C}{2}\end{aligned}$$

である。

(証明終)

(2)

$\triangle ABC$ の外接円の半径を R とすると, 正弦定理より

$$\begin{aligned}\frac{a}{\sin A} &= \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \\ \Leftrightarrow \frac{a}{2R} &= \sin A, \frac{b}{2R} = \sin B, \frac{c}{2R} = \sin C\end{aligned}$$

が成り立つので,

$$\begin{aligned}a+c &= 2b \\ \Leftrightarrow \frac{a}{2R} + \frac{c}{2R} &= 2 \cdot \frac{b}{2R} \\ \Leftrightarrow \sin A + \sin C &= 2 \sin B\end{aligned}$$

が成立する。

(証明終)

(3)

(1), (2)より,

$$\begin{aligned}\sin A + \sin C &= 2 \sin \frac{A+C}{2} \cos \frac{A-C}{2} \\ \Leftrightarrow \sin B &= \cos \frac{B}{2} \cos \frac{A-C}{2} \\ \Leftrightarrow 2 \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2} &= \cos \frac{B}{2} \cos \frac{A-C}{2} \\ \Leftrightarrow \cos \frac{A-C}{2} &= 2 \sin \frac{B}{2}\end{aligned}$$

である。これと, (1)より

$$\cos \frac{A+C}{2} = \sin \frac{B}{2}$$

を用いれば,

$$\begin{aligned}\tan \frac{A}{2} \tan \frac{C}{2} &= \frac{\sin \frac{A}{2} \sin \frac{C}{2}}{\cos \frac{A}{2} \cos \frac{C}{2}} \\ &= -\frac{\cos \frac{A+C}{2} - \cos \frac{A-C}{2}}{\cos \frac{A+C}{2} + \cos \frac{A-C}{2}} \\ &= -\frac{\sin \frac{B}{2} - 2 \sin \frac{B}{2}}{\sin \frac{B}{2} + 2 \sin \frac{B}{2}} \\ &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

と求まる。

(答) $\frac{1}{3}$

(1)

性質(i)より q_n は整数である。

さらに, a_0, a_1 が自然数であることと性質(ii)より, 帰納的に a_n が整数であることが示される。

また, 性質(ii)より, $n \geq 1$ のとき

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_{n-1} - a_n q_n \\ \Leftrightarrow a_{n-1} &= a_n q_n + a_{n+1} \end{aligned}$$

が成り立つ。これと性質(i)を考慮すると, a_{n+1} は a_{n-1} を a_n で割った余りであることが分かる。

よって, $n \geq 1$ のとき

$$0 \leq a_{n+1} \leq a_n - 1$$

が成り立つ。ここで, a_n が整数であることより, 題意は示された。

(証明終)

(2)

性質(ii)より,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_N \\ a_{N+1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{N-1} \\ a_N \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_{N-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{N-2} \\ a_{N-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_{N-1} \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

が成り立つ。ここで, q_n は整数であるから, ある整数 a, b, c, d を用いて,

$$\begin{pmatrix} a_N \\ a_{N+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}$$

と表される。よって, 題意は示された。

(証明終)

(3)

a_0 と a_1 の最大公約数を s とおき,

$$a_0 = st_0, a_1 = st_1$$

とおく。ここで, t_0 と t_1 は互いに素な自然数である。このとき,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} st_0 \\ st_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} st_1 \\ s(t_0 - q_1 t_1) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となり, t_0 と t_1 が互いに素であることから, a_1 と a_2 の最大公約数も s である。

よって, 帰納的に a_{N-1} と a_N の最大公約数も s であることが示されるので,

$$a_{N-1} = st_{N-1}, a_N = st_N$$

とおける。ここで, t_{N-1} と t_N は互いに素な自然数である。このとき,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_N \\ a_{N+1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{N-1} \\ a_N \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} st_{N-1} \\ st_N \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} st_N \\ s(t_{N-1} - q_N t_N) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

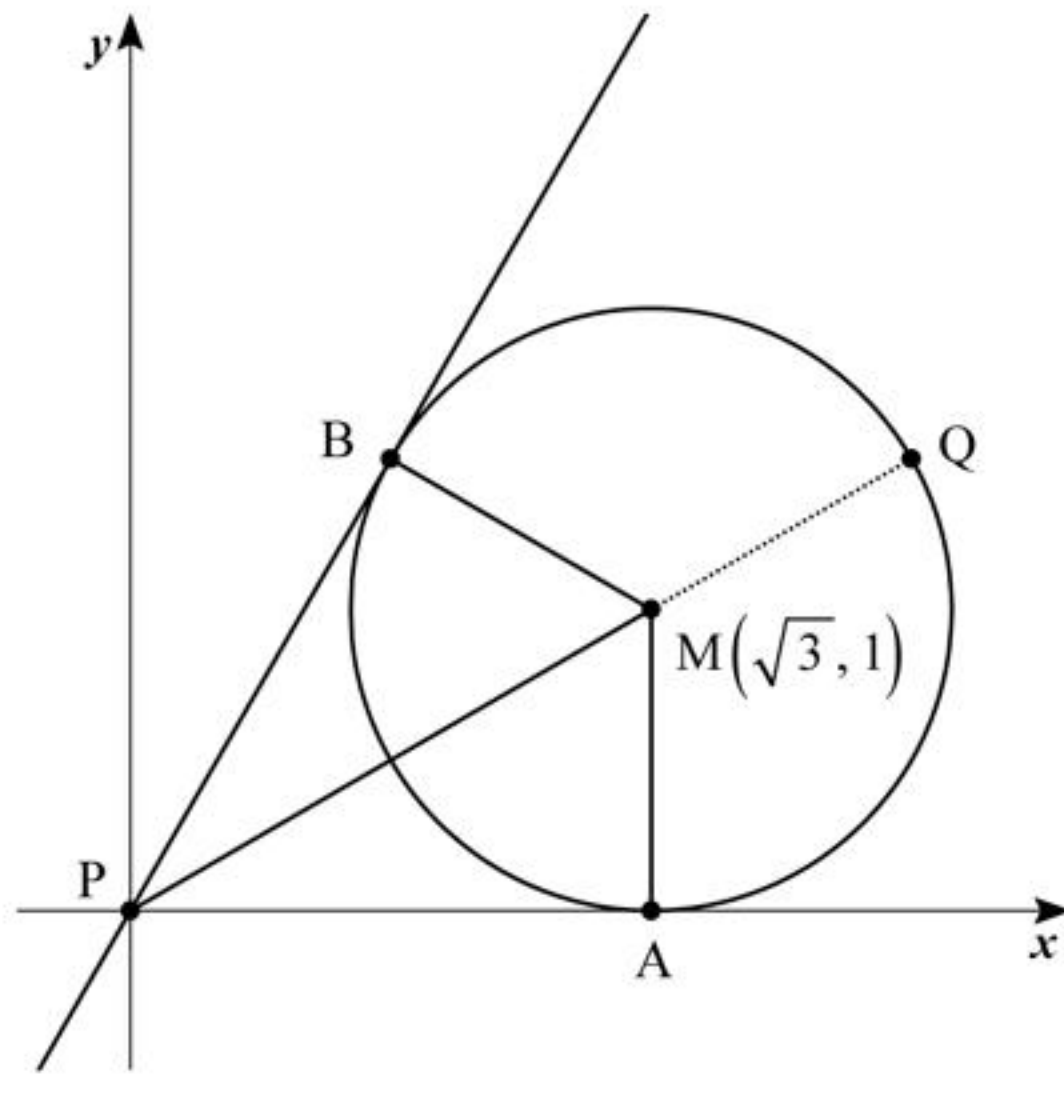
となる。 $a_{N+1} = 0$ と, s が自然数であることを考慮すると,

$$t_{N-1} - q_N t_N = 0 \Leftrightarrow t_{N-1} = q_N t_N$$

を得る。ここで, $t_N \neq 1$ であると仮定すると, t_{N-1} と t_N が互いに素であることに矛盾する。

よって, $t_N = 1$ であるから, $a_N = s$ となり, 題意は示された。

(証明終)



上図のようになり、 $AP = \sqrt{3}$ 、 $AM = 1$ より、 $\angle MPA = \angle MPB = \frac{\pi}{6}$ 、 $MP = 2$ となる。

また、直線 MP と円との交点のうち、 x 座標の大きい方の点を Q と置く。

(1)

点 A からはじめて、 $\widehat{AQB}$ の部分が x 軸に接するようにして転がり、点 B に達したところで線分 PB が x 軸に重なるから、転がった長さは $\widehat{AQB}$ の長さに等しい。 $\widehat{AQB}$ に対する円周角は

$\angle AMB = \frac{4}{3}\pi$ 、円の半径は 1 であるから、転がった長さは、

$$1 \cdot \frac{4}{3}\pi = \frac{4}{3}\pi$$

となる。円の中心の x 座標は常に x 軸との接点の x 座標に一致することに注意すると、円の中

心は、はじめ、 $(\sqrt{3}, 1)$ にあり、 $\left(\sqrt{3} + \frac{4}{3}\pi, 1\right)$ まで移動するので、求める t の範囲は

$$0 \leq t \leq \frac{4}{3}\pi$$

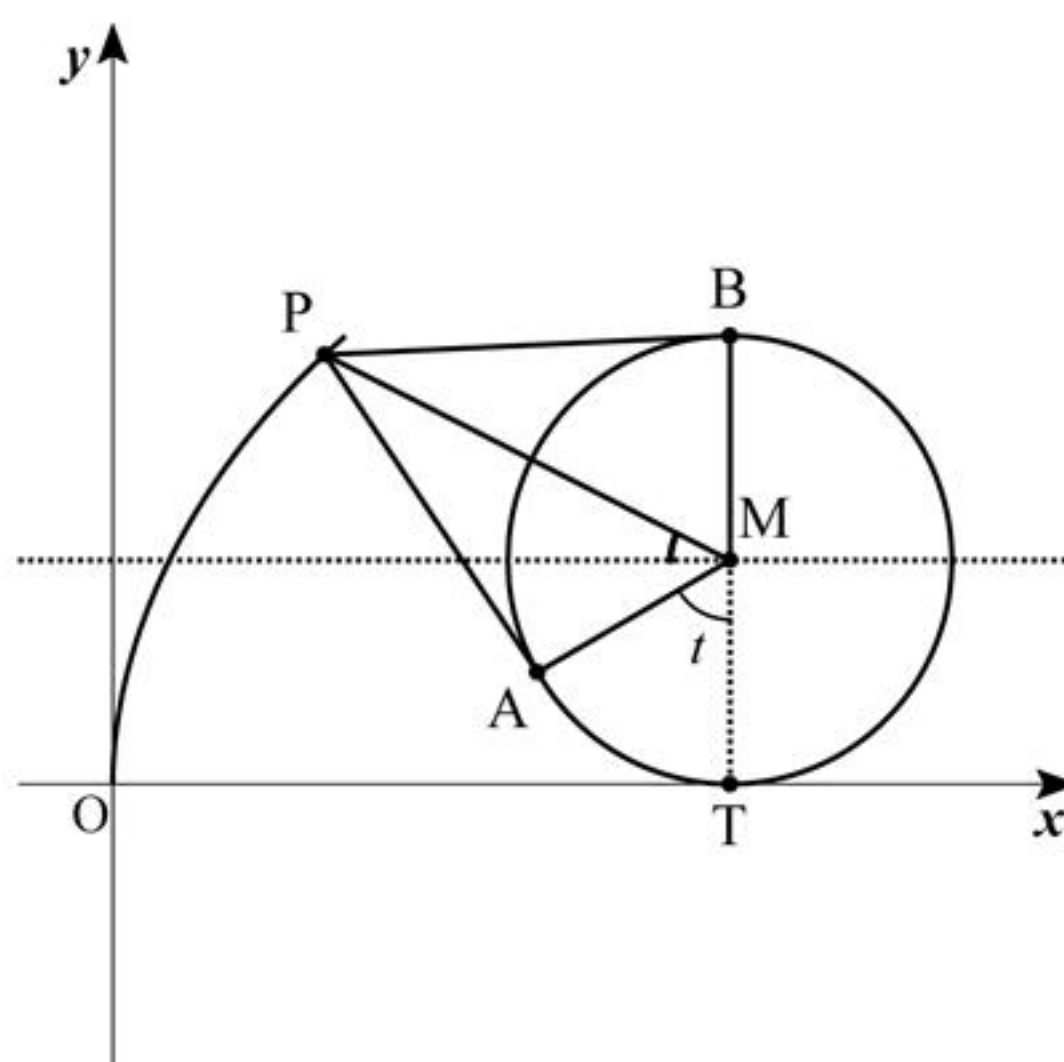
となる。

$$(\text{答}) \quad 0 \leq t \leq \frac{4}{3}\pi$$

(2)

以下、原点を $O(0, 0)$ で表す。また、円と x 軸との接点を T とおく。はじめに、 t だけ回転した

ときの P の位置を t の式で表すことを考える。



上図より、 MP と、 M を通り x 軸に平行な直線のなす角は

$$\angle PMT - \frac{\pi}{2} = \left(\frac{\pi}{3} + t\right) - \frac{\pi}{2} = t - \frac{\pi}{6}$$

となるから、 $MP = 2$ に注意すると、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MP} \\ &= \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -\cos\left(t - \frac{\pi}{6}\right) \\ \sin\left(t - \frac{\pi}{6}\right) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sqrt{3} + t - 2\cos\left(t - \frac{\pi}{6}\right) \\ 1 + 2\sin\left(t - \frac{\pi}{6}\right) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と求まる。

$$\begin{aligned} x(t) &= \sqrt{3} + t - 2\cos\left(t - \frac{\pi}{6}\right) \\ y(t) &= 1 + 2\sin\left(t - \frac{\pi}{6}\right) \end{aligned}$$

とおくと、

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 1 + 2\sin\left(t - \frac{\pi}{6}\right) \\ \frac{dy}{dt} &= 2\cos\left(t - \frac{\pi}{6}\right) \end{aligned}$$

となる。 $\theta = t - \frac{\pi}{6}$ とおくと、 $-\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{7}{6}\pi$ であり、この範囲において、接線の傾きが $\frac{\sqrt{3}}{2}$

となるのは、

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2\cos\theta}{1 + 2\sin\theta} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \Leftrightarrow 4\cos\theta &= \sqrt{3}(1 + 2\sin\theta) \quad \cdots \textcircled{1} \\ \Rightarrow 16\cos^2\theta &= 3(1 + 2\sin\theta)^2 \\ \Leftrightarrow 16(1 - \sin^2\theta) &= 3(1 + 2\sin\theta)^2 \\ \Leftrightarrow 28\sin^2\theta + 12\sin\theta - 13 &= 0 \\ \Leftrightarrow (2\sin\theta - 1)(14\sin\theta + 13) &= 0 \\ \Leftrightarrow \sin\theta &= \frac{1}{2} \\ \therefore \theta &= \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi \end{aligned}$$

のときである。このうち、 $\textcircled{1}$ を満たすのは $\theta = \frac{\pi}{6}$ のみである。このとき、 $t = \theta + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$ であ

るから、

$$\begin{aligned} x\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \sqrt{3} + \frac{\pi}{3} - 2\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} \\ y\left(\frac{\pi}{3}\right) &= 1 + 2\sin\frac{\pi}{6} = 2 \end{aligned}$$

となる。したがって、求める接線 ℓ の方程式は、

$$y - 2 = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{2}x + 2 - \frac{\sqrt{3}}{6}\pi$$

である。

$$(\text{答}) \quad y = \frac{\sqrt{3}}{2}x + 2 - \frac{\sqrt{3}}{6}\pi$$

接線 ℓ と y 軸、 x 軸および $x = \frac{\pi}{3}$ で囲まれた台形の面積 S_1 は

$$\begin{aligned} S_1 &= \left(2 + 2 - \frac{\sqrt{3}}{6}\pi\right) \cdot \frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{36}\pi^2 \end{aligned}$$

である。また、曲線 C と x 軸、 $x = \frac{\pi}{3}$ で囲まれた図形の面積 S_2 は

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} y dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left\{1 + 2\sin\left(t - \frac{\pi}{6}\right)\right\} \cdot \left\{1 + 2\sin\left(t - \frac{\pi}{6}\right)\right\} dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left\{1 + 2\sin\left(t - \frac{\pi}{6}\right)\right\}^2 dt \end{aligned}$$

$\theta = t - \frac{\pi}{6}$ とおくと、

$$\begin{aligned} &= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} (1 + 2\sin\theta)^2 d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} (1 + 4\sin\theta + 4\sin^2\theta) d\theta \end{aligned}$$

さらに、 1 、 $\sin^2\theta$ は偶関数、 $\sin\theta$ は奇関数であることに注意して、

$$\begin{aligned} &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} (1 + 4\sin^2\theta) d\theta \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \{1 + 2(1 - \cos 2\theta)\} d\theta \\ &= 2 [3\theta - \sin 2\theta]_0^{\frac{\pi}{6}} \\ &= \pi - \sqrt{3} \end{aligned}$$

となる。よって、求める面積は、

$$\begin{aligned} S_1 - S_2 &= \left(\frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{36}\pi^2\right) - (\pi - \sqrt{3}) \\ &= \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{36}\pi^2 - \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{36}\pi^2 - \frac{\pi}{3}$$

(1)

A, B ともに, 1 回目で赤球を取り出す確率は, $\frac{{}_3C_1}{{}_5C_1} = \frac{3}{5}$ であるから, 求める確率は

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{25}$$

である。

(答) $\frac{9}{25}$

(2)

A, B ともに, 1 回目で赤球を取り出した場合, 残りの球 4 個中, 赤球は 2 個になっているので, 2 回目に赤球を 2 個取り出す確率は,

$$\frac{{}_2C_1}{{}_4C_1} \cdot \frac{{}_2C_1}{{}_4C_1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

である。したがって, (1) の結果と合わせ, 求める確率は,

$$\frac{9}{25} \cdot \frac{1}{4} = \frac{9}{100}$$

となる。

(答) $\frac{9}{100}$

(3)

1 回目, 2 回目とも赤球を 2 個取り出した場合, 3 回目で取り出された 2 個の球がすべて赤球である確率は, (2) と同様に考えると,

$$\frac{{}_1C_1}{{}_3C_1} \cdot \frac{{}_1C_1}{{}_3C_1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9} \quad \dots \textcircled{1}$$

である。

以下, 初めて白球を取り出すまでの回数で場合分けをして考える。

[1] 1 回目で初めて白球を取り出すとき

これは, 「1 回目の操作で取り出された 2 個の球がともに赤球である」という事象の余事象の確率を考えればよいので, (1) より

$$1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$$

となる。

[2] 2 回目で初めて白球を取り出すとき

[1] と同様に考えると, 1 回目の操作で 2 個とも赤球であり, かつ「2 回目の操作で取り出された球が 2 個とも赤球」でなければよいので, (1), (2) より, 求める確率は

$$\frac{9}{25} \cdot \left(1 - \frac{1}{4} \right) = \frac{27}{100}$$

となる。

[3] 3 回目で初めて白球を取り出すとき

[1], [2] と同様に考えると, (2), ① より, 求める確率は

$$\frac{9}{100} \cdot \left(1 - \frac{1}{9} \right) = \frac{8}{100} = \frac{2}{25}$$

となる。

[4] 4 回目で初めて白球を取り出すとき

1 回目, 2 回目, 3 回目で取り出した 2 個の球がどれも赤球であるときに, この事象は起こるが, このとき, 残りの球は A, B とも白球 2 個なので, 3 回目まですべて赤球なら, 必ず 4 回目は白球が取り出される。したがって, (2), ① より, 求める確率は

$$\frac{9}{100} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{100}$$

となる。

以上, [1], [2], [3], [4] より, 求める期待値は

$$1 \cdot \frac{16}{25} + 2 \cdot \frac{27}{100} + 3 \cdot \frac{2}{25} + 4 \cdot \frac{1}{100} = \frac{73}{50}$$

となる。

(答) $\frac{73}{50}$