

2011 年度

M 3

数 学

2 月 25 日(金)

理 学 部 (数 学 科)

13:00 ~ 15:00

【前 期 日 程】

注 意 事 項

試験開始前

- 1 監督者の指示があるまで、問題冊子、解答用紙に手を触れないでください。
- 2 監督者の指示に従って、全部の解答用紙(4 枚)に受験番号を記入してください。

試験開始後

- 3 この問題冊子は、4 ページあります。はじめに、問題冊子、解答用紙を確かめ、枚数の不足や、印刷の不鮮明なもの、ページの落丁・乱丁があった場合は、手をあげて監督者に申し出てください。
- 4 解答は、すべて別紙解答用紙に記入してください。
- 5 解答スペースが不足するときは、解答用紙の裏面も使用することが出来ます。ただし、その場合は、表面に「裏へつづく」と明記してください。
- 6 問題は、声を出して読むではいけません。
- 7 各問ごとの配点は、比率(%)で表示してあります。

試験終了後

- 8 問題冊子は、必ず持ち帰ってください。

1 $\triangle ABC$ において, $\angle A, \angle B, \angle C$ の大きさと対辺の長さをそれぞれ A, B, C および a, b, c で表す。次の問いに答えよ。

(1) $\sin \frac{B}{2} = \cos \frac{A+C}{2}$ および $\cos \frac{B}{2} = \sin \frac{A+C}{2}$ が成立することを示せ。

(2) $a + c = 2b$ を満たすとき, $\sin A + \sin C = 2 \sin B$ が成立することを示せ。

(3) $a + c = 2b$ を満たすとき, $\sin A + \sin C = 2 \sin \frac{A+C}{2} \cos \frac{A-C}{2}$ を用いて $\tan \frac{A}{2} \tan \frac{C}{2}$ の値を求めよ。

(配点 25 %)

- 2** 自然数 a, b に対して, $a = bq + r$, $0 \leq r \leq b - 1$ を満たす整数 q, r がただ 1 組存在する。このとき q は a を b で割った商, r は a を b で割った余りという。自然数 a_0, a_1 が与えられたとき, 数列 $\{a_n\}, \{q_n\}$ は次の性質を満たすものとする。

$$(i) q_n \text{ は } a_{n-1} \text{ を } a_n \text{ で割った商, } (ii) \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix}$$

ただし $a_{N+1} = 0$ となる自然数 N が存在すれば, $n > N$ に対して q_n および a_{n+1} は定義しない。このとき, 次の問いに答えよ。

- (1) $a_{N+1} = 0$ となる自然数 N が存在することを証明せよ。
- (2) $a_N = aa_0 + ba_1$ を満たす整数 a, b が存在することを証明せよ。
- (3) a_N は a_0 と a_1 の最大公約数であることを証明せよ。

(配点 25 %)

- 3 座標平面上に点 $P(0, 0)$, $M(\sqrt{3}, 1)$ をとる。点 M を中心とし, x 軸に接するように円を描き, 接点を A とおく。 P より円にもう 1 本の接線を引き接点を B とする。円に 2 線分 PA と PB をつけ加えた図形を x 軸に接したまますべることなく x 軸の正の方向にころがし, 線分 PB が x 軸に重なるまで移動させる。次の問いに答えよ。

- (1) 移動中の円の中心の座標を $(\sqrt{3} + t, 1)$ とする。 t の取りうる値の範囲を求めよ。
- (2) 点 P の軌跡を C とする。曲線 C の接線 ℓ の傾きが $\frac{\sqrt{3}}{2}$ のとき, 直線 ℓ の方程式を求めよ。
- (3) 曲線 C と (2) で求めた接線 ℓ および y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

(配点 25 %)

4 A の袋には赤球 3 個と白球 2 個が, B の袋にも赤球 3 個と白球 2 個が入っている。A, B の袋から, それぞれ任意に 1 個の球を同時に取り出す。取り出した球は元に戻さず, これを 1 回の操作とする。この操作を 4 回繰り返すとき, 次の問いに答えよ。

- (1) 1 回目の操作で取り出された 2 個の球がともに赤球である確率を求めよ。
- (2) 1 回目の操作で取り出された 2 個の球と 2 回目の操作で取り出された 2 個の球がすべて赤球である確率を求めよ。
- (3) 初めて白球が取り出されるまでの球を取り出す操作の回数の期待値を求めよ。

(配点 25 %)