

(1)

放物線 $y = x^2$ の $x = t$ における接線は

$$y = 2t(x - t) + t^2 = 2tx - t^2$$

であるので、点 A, B における接線はそれぞれ

$$y = 2ax - a^2 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$y = 2bx - b^2 \quad \dots \textcircled{2}$$

とかける。

①, ②の交点を求めると

$$(x, y) = \left(\frac{a+b}{2}, ab \right)$$

となる。

$$(\text{答}) \left(\frac{a+b}{2}, ab \right)$$

(2)

 $\triangle ABC$ が正三角形になることより

$$AB = BC = CA \Leftrightarrow AB^2 = BC^2 = CA^2$$

が成り立つ。

よって

$$AB^2 = BC^2 \Leftrightarrow (a-b)^2 + (a^2 - b^2)^2 = \left(\frac{a-b}{2} \right)^2 + (ab - b^2)^2 \quad \dots \textcircled{3}$$

$$AB^2 = CA^2 \Leftrightarrow (a-b)^2 + (a^2 - b^2)^2 = \left(\frac{a-b}{2} \right)^2 + (ab - a^2)^2 \quad \dots \textcircled{4}$$

を得る。

 $a \neq b$ より、③, ④の両辺を $(a-b)^2$ で割ると

$$1 + (a+b)^2 = \frac{1}{4} + b^2 \quad \dots \textcircled{5}$$

$$1 + (a+b)^2 = \frac{1}{4} + a^2 \quad \dots \textcircled{6}$$

を得る。

⑤, ⑥より $a^2 = b^2$ がわかる。ここで $a < 0 < b$ なので、 $a = -b$ である。

これを⑤に代入すると

$$b^2 = \frac{3}{4} \Leftrightarrow b = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (\because b > 0)$$

とわかる。

$$\text{よって } (a, b) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \text{ となる。}$$

$$(\text{答}) (a, b) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

(3)

 $\triangle ABC$ は $\angle A$ が直角である直角二等辺三角形なので

$$AB = CA \Leftrightarrow AB^2 = CA^2$$

$$\sqrt{2}AB = BC \Leftrightarrow 2AB^2 = BC^2$$

が成り立つ。

 $AB^2 = CA^2$ は、(2)より⑥と同値である。

また

$$\begin{aligned} 2AB^2 = BC^2 &\Leftrightarrow 2 \left\{ (a-b)^2 + (a^2 - b^2)^2 \right\} = \left(\frac{a-b}{2} \right)^2 + (ab - b^2)^2 \\ &\Leftrightarrow 2 + 2(a+b)^2 = \frac{1}{4} + b^2 \quad \dots \textcircled{7} \end{aligned}$$

となる。

⑦-⑥より

$$1 + (a+b)^2 = b^2 - a^2 \Leftrightarrow 1 + 2a^2 = -2ab \quad \dots \textcircled{8}$$

を得る。

また⑥×2-⑦より

$$\frac{1}{2} + 2a^2 = \frac{1}{4} + b^2 \Leftrightarrow b^2 = 2a^2 + \frac{1}{4} \quad \dots \textcircled{9}$$

を得る。

⑧の両辺を2乗すると、

$$4a^4 + 4a^2 + 1 = 4a^2b^2$$

であり、これに⑨を代入すると

$$\begin{aligned} 4a^4 + 4a^2 + 1 &= 4a^2 \left(2a^2 + \frac{1}{4} \right) \Leftrightarrow 4a^4 - 3a^2 - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow (4a^2 + 1)(a-1)(a+1) = 0 \end{aligned}$$

となる。 $a < 0$ より、 $a = -1$ と求まる。

これを⑨に代入して

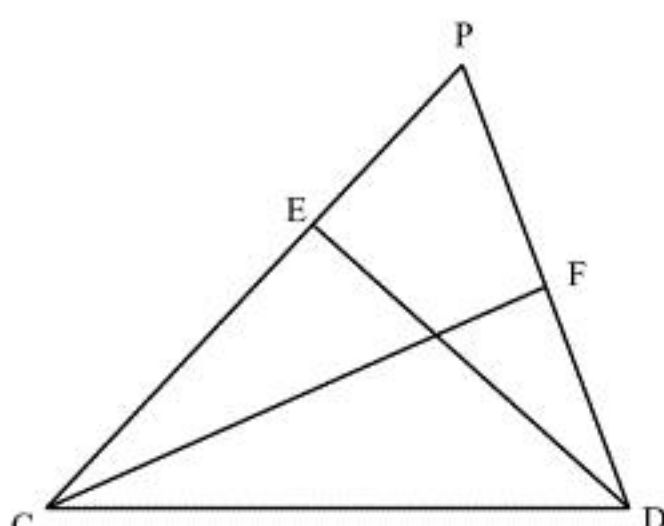
$$b^2 = \frac{9}{4} \Leftrightarrow b = \frac{3}{2} \quad (\because b > 0)$$

と求まる。以上より、 $(a, b) = \left(-1, \frac{3}{2} \right)$ である。

$$(\text{答}) (a, b) = \left(-1, \frac{3}{2} \right)$$

(1)

辺 AB の中点を P とおく。すると、 E は $\triangle ABC$ の重心なので、線分 CP 上にある。
また、 F は $\triangle ABD$ の重心なので、線分 DP 上にある。



これより、線分 DE と線分 CF は、ともに平面 CDP 上にあり、特に $\triangle CDP$ の内部にある。
また、点 F は線分 DE に関して点 C の反対側に位置するので、線分 DE と線分 CF は平面 CDP 上で交わる。

(証明終)

(2)

E, F はそれぞれ $\triangle ABC$ と $\triangle ABD$ の重心なので、

$$\overrightarrow{OE} = \frac{\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}}{3}, \quad \overrightarrow{OF} = \frac{\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{d}}{3}$$

と表せる。よって、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{DE} &= \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OD} = \frac{\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} - 3\overrightarrow{d}}{3} \\ \overrightarrow{CF} &= \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OC} = \frac{\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} - 3\overrightarrow{c} + \overrightarrow{d}}{3} \end{aligned}$$

である。 G は線分 DE 上にあるから、 $0 < x < 1$ の実数 x を用いて

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OG} &= \overrightarrow{OD} + x\overrightarrow{DE} \\ &= \frac{x}{3}\overrightarrow{a} + \frac{x}{3}\overrightarrow{b} + \frac{x}{3}\overrightarrow{c} + (1-x)\overrightarrow{d} \end{aligned} \quad \cdots \textcircled{1}$$

とかける。

同様に、 G は線分 CF 上にあるから、 $0 < y < 1$ の実数 y を用いて

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OG} &= \overrightarrow{OC} + y\overrightarrow{CF} \\ &= \frac{y}{3}\overrightarrow{a} + \frac{y}{3}\overrightarrow{b} + (1-y)\overrightarrow{c} + \frac{y}{3}\overrightarrow{d} \end{aligned} \quad \cdots \textcircled{2}$$

とかける。ここで、 $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{d}$ は互いに一次独立であるので、①、②の係数を比較すると、

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{3}, \frac{x}{3} = 1-y, 1-x = \frac{y}{3} \Leftrightarrow x = y = \frac{3}{4} \quad \cdots \textcircled{3}$$

とわかる。また、 $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{d}$ のいずれかが $\vec{0}$ であるとき、 $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{d}$ は相異なるから、 $\vec{0}$ であるものは1つだけである。したがって、③において $\Leftrightarrow$ の左側の式のうち1つを除いてもよく、

このときも $x = y = \frac{3}{4}$ を得る。これを①に代入すると、

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} + \overrightarrow{d})$$

を得る。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{OG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} + \overrightarrow{d})$$

(3)

条件より G の座標は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0-1+3-2 \\ 0+3+0-3 \\ 4+0+0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となる。

よって

$$\overrightarrow{GA} = (0, 0, 3), \quad \overrightarrow{GB} = (-1, 3, -1), \quad \overrightarrow{GC} = (3, 0, -1)$$

であり、

$$|\overrightarrow{GA}| = 3, \quad |\overrightarrow{GB}| = \sqrt{11}, \quad |\overrightarrow{GC}| = \sqrt{10}$$

と求まる。

内積の定義から

$$\cos \angle AGB = \frac{\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB}}{|\overrightarrow{GA}| \cdot |\overrightarrow{GB}|} = \frac{-3}{3\sqrt{11}} = -\frac{1}{\sqrt{11}}$$

$$\cos \angle BGC = \frac{\overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC}}{|\overrightarrow{GB}| \cdot |\overrightarrow{GC}|} = \frac{-2}{\sqrt{11} \cdot \sqrt{10}} = -\frac{2}{\sqrt{110}}$$

$$\cos \angle CGA = \frac{\overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GA}}{|\overrightarrow{GC}| \cdot |\overrightarrow{GA}|} = \frac{-3}{3\sqrt{10}} = -\frac{1}{\sqrt{10}}$$

となる。よって、

$$\cos \angle BGC > \cos \angle AGB > \cos \angle CGA$$

である。 $0 < \angle AGB, \angle BGC, \angle CGA < \pi$ を考慮すると、求める大小関係は

$$\angle CGA > \angle AGB > \angle BGC$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \angle CGA > \angle AGB > \angle BGC$$

(1)

2 日目の朝の始業前のタンクの水量は,

$$8000 - 8000 \cdot \frac{1}{10} + 200 = 7400 \text{ (リットル)}$$

であるから, 3 日目の朝の始業前のタンクの水量は,

$$7400 - 7400 \cdot \frac{1}{10} + 200 = 6860 \text{ (リットル)}$$

となる。

(答) 6860 リットル

(2)

$n+1$ 日目の朝の始業前のタンクの水量は,

$$a_{n+1} = a_n - \frac{1}{10} a_n + 200 = \frac{9}{10} a_n + 200 \text{ (リットル)}$$

となる。

$$(答) \quad a_{n+1} = \frac{9}{10} a_n + 200$$

(3)

(2)で求めた式を変形すると,

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{9}{10} a_n + 200 \\ \Leftrightarrow a_{n+1} - 2000 &= \frac{9}{10} (a_n - 2000) \end{aligned}$$

であるから, 数列 $\{a_n - 2000\}$ は初項 $a_1 - 2000 = 6000$, 公比 $\frac{9}{10}$ の等比数列である。

したがって,

$$\begin{aligned} a_n - 2000 &= 6000 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^{n-1} \\ \therefore a_n &= 2000 + 6000 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

である。朝の始業前のタンクの水量が 2400 リットル未満になるとき,

$$\begin{aligned} a_n &< 2400 \\ \Leftrightarrow 2000 + 6000 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^{n-1} &< 2400 \\ \Leftrightarrow \left(\frac{9}{10}\right)^{n-1} &< \frac{2}{30} \end{aligned}$$

である。ここで, 両辺の常用対数をとると,

$$\begin{aligned} \log_{10} \left(\frac{9}{10}\right)^{n-1} &< \log_{10} \frac{2}{30} \\ \Leftrightarrow (n-1)(2 \log_{10} 3 - 1) &< \log_{10} 2 - \log_{10} 3 - 1 \\ \Leftrightarrow (n-1)(2 \cdot 0.4771 - 1) &< 0.3010 - 0.4771 - 1 \\ \Leftrightarrow -0.0458(n-1) &< -1.1761 \\ \Leftrightarrow n-1 &> 25.6\dots \\ \therefore n &> 26.6\dots \end{aligned}$$

であるから, 朝の始業前のタンクの水量がはじめて 2400 リットル未満になるのは, 27 日目の朝となる。

(答) 27 日目の朝

(1)

$$\begin{aligned}
 \cos x \sin 2x &= 2 \cos^2 x \sin x \\
 &= 2(1 - \sin^2 x) \sin x \\
 &= 2t - 2t^3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \cos 2x &= 1 - 2 \sin^2 x \\
 &= 1 - 2t^2
 \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned}
 y &= 4(2t - 2t^3) - 3\sqrt{3}(1 - 2t^2) - 8t + \sqrt{3} \\
 &= -8t^3 + 6\sqrt{3}t^2 - 2\sqrt{3}
 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad y = -8t^3 + 6\sqrt{3}t^2 - 2\sqrt{3}$$

(2)

$0 \leq x < 2\pi$ のとき, $-1 \leq t \leq 1$ である。また,

$$\begin{aligned}
 y' &= -24t^2 + 12\sqrt{3}t \\
 &= -24t \left(t - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)
 \end{aligned}$$

であるから, y の増減表は次のようになる。

t	-1	...	0	...	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	...	1
y'		-	0	+	0	-	
y	$4\sqrt{3} + 8$	$\searrow$	$-2\sqrt{3}$	$\nearrow$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	$4\sqrt{3} - 8$

ここで,

$$4\sqrt{3} + 8 > 0 > -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

であるから, y の最大値は $4\sqrt{3} + 8$ であり, このとき,

$$t = -1 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}\pi$$

である。また,

$$\begin{aligned}
 \sqrt{3} &> 1.7 \\
 \Leftrightarrow 6\sqrt{3} &> 10.2 \\
 \Leftrightarrow 6\sqrt{3} - 8 &> 2.2 (> 0) \\
 \therefore 4\sqrt{3} - 8 &> -2\sqrt{3}
 \end{aligned}$$

であるから, y の最小値は $-2\sqrt{3}$ であり, このとき,

$$t = 0 \Leftrightarrow x = 0, \pi$$

である。

$$(\text{答}) \quad \begin{cases} \text{最大値: } 4\sqrt{3} + 8 & (x = \frac{3}{2}\pi \text{ のとき}) \\ \text{最小値: } -2\sqrt{3} & (x = 0, \pi \text{ のとき}) \end{cases}$$