

1

(1)

放物線 $y = x^2$ の $x = t$ における接線は

$$y = 2t(x - t) + t^2 = 2tx - t^2$$

であるので、点 A、B における接線はそれぞれ

$$y = 2ax - a^2 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$y = 2bx - b^2 \quad \dots \textcircled{2}$$

とかける。

①、②の交点を求めると

$$(x, y) = \left(\frac{a+b}{2}, ab \right)$$

となる。

$$(\text{答}) \left(\frac{a+b}{2}, ab \right)$$

(2)

$\triangle ABC$ が正三角形になることより

$$AB = BC = CA \Leftrightarrow AB^2 = BC^2 = CA^2$$

が成り立つ。

よって

$$AB^2 = BC^2 \Leftrightarrow (a-b)^2 + (a^2 - b^2)^2 = \left(\frac{a-b}{2} \right)^2 + (ab - b^2)^2 \quad \dots \textcircled{3}$$

$$AB^2 = CA^2 \Leftrightarrow (a-b)^2 + (a^2 - b^2)^2 = \left(\frac{a-b}{2} \right)^2 + (ab - a^2)^2 \quad \dots \textcircled{4}$$

を得る。

$a \neq b$ より、③、④の両辺を $(a-b)^2$ で割ると

$$1 + (a+b)^2 = \frac{1}{4} + b^2 \quad \dots \textcircled{5}$$

$$1 + (a+b)^2 = \frac{1}{4} + a^2 \quad \dots \textcircled{6}$$

を得る。

⑤、⑥より $a^2 = b^2$ がわかる。

ここで $a < 0 < b$ なので、 $a = -b$ である。

$$b^2 = \frac{3}{4} \Leftrightarrow b = \frac{\sqrt{3}}{2} (\because b > 0)$$

とわかる。

よって $(a, b) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$ となる。

$$(\text{答}) (a, b) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

(3)

[1] $\angle A$ が直角であるとき

$$AB = CA \Leftrightarrow AB^2 = CA^2$$

$$\sqrt{2}AB = BC \Leftrightarrow 2AB^2 = BC^2$$

が成り立つ。

$AB^2 = CA^2$ は、(2)より⑥と同値である。

また

$$\begin{aligned} 2AB^2 = BC^2 &\Leftrightarrow 2\left\{(a-b)^2 + (a^2 - b^2)^2\right\} = \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + (ab - b^2)^2 \\ &\Leftrightarrow 2 + 2(a+b)^2 = \frac{1}{4} + b^2 \quad \dots \textcircled{7} \end{aligned}$$

となる。

⑦-⑥より

$$1 + (a+b)^2 = b^2 - a^2 \Leftrightarrow 1 + 2a^2 = -2ab \quad \dots \textcircled{8}$$

を得る。

また⑥ $\times 2$ -⑦より

$$\frac{1}{2} + 2a^2 = \frac{1}{4} + b^2 \Leftrightarrow b^2 = 2a^2 + \frac{1}{4} \quad \dots \textcircled{9}$$

を得る。

⑧の両辺を 2 乗すると、

$$4a^4 + 4a^2 + 1 = 4a^2b^2$$

であり、これに⑨を代入すると

$$\begin{aligned} 4a^4 + 4a^2 + 1 &= 4a^2 \left(2a^2 + \frac{1}{4} \right) \Leftrightarrow 4a^4 - 3a^2 - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow (4a^2 + 1)(a-1)(a+1) = 0 \end{aligned}$$

となる。 $a < 0$ より、 $a = -1$ と求まる。

これを⑨に代入して

$$b^2 = \frac{9}{4} \Leftrightarrow b = \frac{3}{2} (\because b > 0)$$

と求まる。よって、 $(a, b) = \left(-1, \frac{3}{2} \right)$ である。

[2] $\angle B$ が直角であるとき

対称性より、明らかに $(a, b) = \left(-\frac{3}{2}, 1 \right)$ である。

[3] $\angle C$ が直角であるとき

$BC = CA$ なので

$$\begin{aligned} BC^2 = CA^2 &\Leftrightarrow \left(\frac{a-b}{2} \right)^2 + (ab - b^2)^2 = \left(\frac{a-b}{2} \right)^2 + (ab - a^2)^2 \\ &\Leftrightarrow a^2 = b^2 \end{aligned}$$

となり、 $a < 0 < b$ より $a = -b$ と求まる。

また①と②は直交するので

$$2a \cdot 2b = -1$$

が成り立ち、これと $a = -b$ より

$$-4a^2 = -1 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2} (\because a < 0)$$

となる。

よって $(a, b) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$ と求まる。

以上より、 $\triangle ABC$ が直角二等辺三角形となるような (a, b) の組は

$$(a, b) = \left(-1, \frac{3}{2} \right), \left(-\frac{3}{2}, 1 \right), \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

である。

$$(\text{答}) (a, b) = \left(-1, \frac{3}{2} \right), \left(-\frac{3}{2}, 1 \right), \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

(1)

ケーリー・ハミルトンの定理より、

$$A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E = O \quad \dots \textcircled{1}$$

が成り立つ。また、条件式

$$A^2 - 4A + 3E = O \quad \dots \textcircled{2}$$

が成り立つ。①-②より、

$$\{A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E\} - (A^2 - 4A + 3E) = O$$

$$\Leftrightarrow \{4 - (a+d)\}A = \{3 - (ad-bc)\}E \quad \dots \textcircled{3}$$

となる。

[1] $a+d=4$ のとき

③より

$$O = \{3 - (ad-bc)\}E$$

$$\Leftrightarrow ad-bc=3$$

となる。よって、 $ad-bc=3$ となるように a, b, c, d を選べば③が成り立つので、 $a+d=4$ は成立し得る。

[2] $a+d \neq 4$ のとき

③より

$$A = \frac{3 - (ad-bc)}{4 - (a+d)}E \quad \dots \textcircled{4}$$

が得られる。したがって A は E の定数倍となるので、 k を実数として $A = kE$ とおける。これを②に代入すると、

$$(k^2 - 4k + 3)E = O$$

$$\Leftrightarrow (k-1)(k-3)E = O$$

$$\Leftrightarrow k=1, 3$$

が得られる。 $k=1$ のとき

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \dots \textcircled{5}$$

となり、 $a+d=2$ である。 $k=3$ のとき

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \dots \textcircled{6}$$

となり、 $a+d=6$ である。以上[1], [2]より、 $a+d$ のとり得る値は 2, 4, 6 である。

(答) 2, 4, 6

(2)

[1] $a+d=4$ のとき

このとき③より

$$ad-bc=3$$

$$\Leftrightarrow bc = -3 + a(4-a)$$

$$\Leftrightarrow bc = -(a-3)(a-1) \quad \dots \textcircled{7}$$

を得る。ここで $b=c$ より $bc \geq 0$ であるので、

$$-(a-3)(a-1) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq a \leq 3$$

が必要条件である。これを満たす整数 a は $a=1, 2, 3$ の 3 通りのみである。 $a=1$ のとき $a+d=4$, ⑦, $b=c$ の条件より

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

を得る。同様に、 $a=2$ のとき

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$

 $a=3$ のとき

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を得る。

[2] $a+d \neq 4$ のとき

(1)より、 A の候補は⑤, ⑥の 2 種類のみである。これらは $b=c$ かつ a が整数という条件を満たしている。

以上[1], [2]より、条件を満たすような A は

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

の 6 種類である。

$$(答) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(1)

2 日目の朝の始業前のタンクの水量は,

$$8000 - 8000 \cdot \frac{1}{10} + 200 = 7400 \text{ (リットル)}$$

であるから, 3 日目の朝の始業前のタンクの水量は,

$$7400 - 7400 \cdot \frac{1}{10} + 200 = 6860 \text{ (リットル)}$$

となる。

(答) 6860 リットル

(2)

$n+1$ 日目の朝の始業前のタンクの水量は,

$$a_{n+1} = a_n - \frac{1}{10} a_n + 200 = \frac{9}{10} a_n + 200 \text{ (リットル)}$$

となる。

$$(答) a_{n+1} = \frac{9}{10} a_n + 200$$

(3)

(2)で求めた式を変形すると,

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{9}{10} a_n + 200 \\ \Leftrightarrow a_{n+1} - 2000 &= \frac{9}{10} (a_n - 2000) \end{aligned}$$

であるから, 数列 $\{a_n - 2000\}$ は初項 $a_1 - 2000 = 6000$, 公比 $\frac{9}{10}$ の等比数列である。

したがって,

$$\begin{aligned} a_n - 2000 &= 6000 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^{n-1} \\ \therefore a_n &= 2000 + 6000 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

である。朝の始業前のタンクの水量が 2400 リットル未満になるとき,

$$\begin{aligned} a_n &< 2400 \\ \Leftrightarrow 2000 + 6000 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^{n-1} &< 2400 \\ \Leftrightarrow \left(\frac{9}{10}\right)^{n-1} &< \frac{2}{30} \end{aligned}$$

である。ここで, 両辺の常用対数をとると,

$$\begin{aligned} \log_{10} \left(\frac{9}{10}\right)^{n-1} &< \log_{10} \frac{2}{30} \\ \Leftrightarrow (n-1)(2\log_{10} 3 - 1) &< \log_{10} 2 - \log_{10} 3 - 1 \\ \Leftrightarrow (n-1)(2 \cdot 0.4771 - 1) &< 0.3010 - 0.4771 - 1 \\ \Leftrightarrow -0.0458(n-1) &< -1.1761 \\ \Leftrightarrow n-1 &> 25.6\cdots \\ \therefore n &> 26.6\cdots \end{aligned}$$

であるから, 朝の始業前のタンクの水量がはじめて 2400 リットル未満になるのは, 27 日目の朝となる。

(答) 27 日目の朝

(1)

$$g(x)=\log x$$

とし、 $G(x)$ を $g(x)$ の原始関数の 1 つとする。このとき、

$$f(x)=\int_x^{x+1} g(t) dt=G(x+1)-G(x)$$

となる。ここで、 C を積分定数として

$$\begin{aligned} G(x) &= \int g(x) dx \\ &= \int \log x dx \\ &= x \log x - x + C \end{aligned}$$

と表せるので、

$$\begin{aligned} f(x) &= G(x+1)-G(x) \\ &= \{(x+1)\log(x+1)-(x+1)+C\}-(x\log x-x+C) \\ &= (x+1)\log(x+1)-x\log x-1 \end{aligned}$$

となる。また、

$$f'(x)=G'(x+1)-G'(x)=g(x+1)-g(x)=\log(x+1)-\log x$$

となる。

(答) $f(x)=(x+1)\log(x+1)-x\log x-1, f'(x)=\log(x+1)-\log x$

(2)

$$h(x)=x\log x$$

とし、 $H(x)$ を $h(x)$ の原始関数の 1 つとする。(1)の結果より

$$f(x)=h(x+1)-h(x)-1$$

と表せることから、

$$\begin{aligned} \int_1^2 f(x) dx &= \int_1^2 \{h(x+1)-h(x)-1\} dx \\ &= [H(x+1)-H(x)-x]_1^2 \\ &= H(3)-2H(2)+H(1)-1 \end{aligned}$$

となる。ここで、 C を積分定数として

$$\begin{aligned} H(x) &= \int h(x) dx \\ &= \int x\log x dx \\ &= \left(\frac{1}{2}x^2\right) \cdot \log x - \int \left(\frac{1}{2}x^2\right) \cdot (\log x)' dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 \log x - \frac{1}{2} \int x dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 \log x - \frac{1}{4}x^2 + C \end{aligned}$$

と表せるので、

$$\begin{aligned} \int_1^2 f(x) dx &= H(3)-2H(2)+H(1)-1 \\ &= \left(\frac{9}{2}\log 3 - \frac{9}{4} + C\right) - 2 \cdot (2\log 2 - 1 + C) + \left(-\frac{1}{4} + C\right) - 1 \\ &= \frac{9}{2}\log 3 - 4\log 2 - \frac{3}{2} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{9}{2}\log 3 - 4\log 2 - \frac{3}{2}$

(3)

直線 $y=k(x+1)$ と曲線 C が共有点を持つということは、

$$\text{曲線 } D: y=f(x)-k(x+1)$$

が x 軸と交点を持つことと同値である。また、曲線 D について

$$y'=f'(x)-k=\{\log(x+1)-\log x\}-k=\log\left(\frac{1}{x}+1\right)-k \qquad \cdots \textcircled{1}$$

が成り立つ。

[1] $k=0$ のとき

①より、曲線 D について常に $y'>0$ が成り立つので、曲線 D は単調増加関数のグラフを表している。ここで

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +0} \{f(x)-k(x+1)\} &= (0-0-1)-0=-1<0 \quad (\because \lim_{x \rightarrow +0} x\log x=0) \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \{f(x)-k(x+1)\} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left\{ \log(x+1)+x\log\left(\frac{1}{x}+1\right) \right\} = +\infty > 0 \end{aligned}$$

が成り立つので、曲線 D は $x>0$ において必ず 1 つ x 軸と交点を持つ。

[2] $k>0$ のとき

①の値を 0 とすると

$$\begin{aligned} \log\left(\frac{1}{x}+1\right)-k &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{1}{e^k-1} \end{aligned}$$

となる。したがって、曲線 D について以下の増減表を得る。

x	(0)	...	$\frac{1}{e^k-1}$	...
y'		+	0	-
y	$(-1-k)$	$\nearrow$		$\searrow$

したがって曲線 D が表す関数は $x=\frac{1}{e^k-1}$ において最大値をとり、その最大値が 0 以上

であれば曲線 D は x 軸と交点を持つ。その条件は

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{e^k-1}\right)-k\left(\frac{1}{e^k-1}+1\right) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow \left(\frac{1}{e^k-1}+1\right)\log\left(\frac{1}{e^k-1}+1\right)-\frac{1}{e^k-1}\log\left(\frac{1}{e^k-1}\right)-1-k\left(\frac{1}{e^k-1}+1\right) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow \log\left(\frac{e^k}{e^k-1}\right)-1-k &\geq 0 \\ \Leftrightarrow k-\log(e^k-1)-1-k &\geq 0 \\ \Leftrightarrow e^k-1 &\leq \frac{1}{e} \\ \Leftrightarrow k &\leq \log(e+1)-1 \end{aligned}$$

となる。

以上[1], [2]より、直線 $y=k(x+1)$ と曲線 C が共有点を持つ条件は

$$0 \leq k \leq \log(e+1)-1$$

である。

(答) $0 \leq k \leq \log(e+1)-1$