

(1)

放物線 $y = x^2$ の $x = t$ における接線は

$$y = 2t(x - t) + t^2 = 2tx - t^2$$

であるので、点 A, B における接線はそれぞれ

$$y = 2ax - a^2 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$y = 2bx - b^2 \quad \dots \textcircled{2}$$

とかける。

①, ②の交点を求めると

$$(x, y) = \left(\frac{a+b}{2}, ab \right)$$

となる。

$$(\text{答}) \left(\frac{a+b}{2}, ab \right)$$

(2)

 $\triangle ABC$ が正三角形になることより

$$AB = BC = CA \Leftrightarrow AB^2 = BC^2 = CA^2$$

が成り立つ。

よって

$$AB^2 = BC^2 \Leftrightarrow (a-b)^2 + (a^2 - b^2)^2 = \left(\frac{a-b}{2} \right)^2 + (ab - b^2)^2 \quad \dots \textcircled{3}$$

$$AB^2 = CA^2 \Leftrightarrow (a-b)^2 + (a^2 - b^2)^2 = \left(\frac{a-b}{2} \right)^2 + (ab - a^2)^2 \quad \dots \textcircled{4}$$

を得る。

 $a \neq b$ より、③, ④の両辺を $(a-b)^2$ で割ると

$$1 + (a+b)^2 = \frac{1}{4} + b^2 \quad \dots \textcircled{5}$$

$$1 + (a+b)^2 = \frac{1}{4} + a^2 \quad \dots \textcircled{6}$$

を得る。

⑤, ⑥より $a^2 = b^2$ がわかる。ここで $a < 0 < b$ なので、 $a = -b$ である。

これを⑤に代入すると

$$b^2 = \frac{3}{4} \Leftrightarrow b = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (\because b > 0)$$

とわかる。

よって $(a, b) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$ となる。また正三角形の一辺の長さは $\frac{\sqrt{3}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \sqrt{3}$ であるので

正三角形の面積は

$$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \sin 60^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

である。

また放物線と線分 AB で囲まれた面積は

$$\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(\frac{3}{4} - x^2 \right) dx = \left[\frac{3}{4}x - \frac{1}{3}x^3 \right]_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

である。

よって求める面積は

$$\frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

となる。

$$(\text{答}) (a, b) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right), \text{面積} \frac{\sqrt{3}}{4}$$

(3)

 $\triangle ABC$ は $\angle A$ が直角である直角二等辺三角形なので

$$AB = CA \Leftrightarrow AB^2 = CA^2$$

$$\sqrt{2}AB = BC \Leftrightarrow 2AB^2 = BC^2$$

が成り立つ。

 $AB^2 = CA^2$ は、(2)より⑥と同値である。

また

$$\begin{aligned} 2AB^2 = BC^2 &\Leftrightarrow 2\left\{ (a-b)^2 + (a^2 - b^2)^2 \right\} = \left(\frac{a-b}{2} \right)^2 + (ab - b^2)^2 \\ &\Leftrightarrow 2 + 2(a+b)^2 = \frac{1}{4} + b^2 \quad \dots \textcircled{7} \end{aligned}$$

となる。

⑦-⑥より

$$1 + (a+b)^2 = b^2 - a^2 \Leftrightarrow 1 + 2a^2 = -2ab \quad \dots \textcircled{8}$$

を得る。

また⑥ $\times 2$ -⑦より

$$\frac{1}{2} + 2a^2 = \frac{1}{4} + b^2 \Leftrightarrow b^2 = 2a^2 + \frac{1}{4} \quad \dots \textcircled{9}$$

を得る。

⑧の両辺を 2 乗すると、

$$4a^4 + 4a^2 + 1 = 4a^2b^2$$

であり、これに⑨を代入すると

$$\begin{aligned} 4a^4 + 4a^2 + 1 &= 4a^2 \left(2a^2 + \frac{1}{4} \right) \Leftrightarrow 4a^4 - 3a^2 - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow (4a^2 + 1)(a-1)(a+1) = 0 \end{aligned}$$

となる。 $a < 0$ より、 $a = -1$ と求まる。

これを⑨に代入して

$$b^2 = \frac{9}{4} \Leftrightarrow b = \frac{3}{2} \quad (\because b > 0)$$

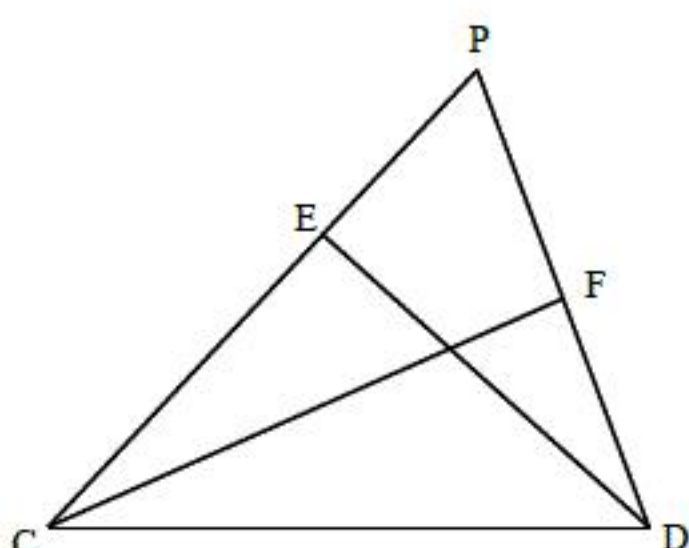
と求まる。以上より、 $(a, b) = \left(-1, \frac{3}{2} \right)$ である。

$$(\text{答}) (a, b) = \left(-1, \frac{3}{2} \right)$$

(1)

辺 AB の中点を P とおく。すると、 E は $\triangle ABC$ の重心なので、線分 CP 上にある。

また、 F は $\triangle ABD$ の重心なので、線分 DP 上にある。



これより、線分 DE と線分 CF は、ともに平面 CDP 上にあり、特に $\triangle CDP$ の内部にある。

また、点 F は線分 DE に関して点 C の反対側に位置するので、線分 DE と線分 CF は平面 CDP 上で交わる。

(証明終)

(2)

E, F はそれぞれ $\triangle ABC$ と $\triangle ABD$ の重心なので、

$$\overrightarrow{OE} = \frac{\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}}{3}, \quad \overrightarrow{OF} = \frac{\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{d}}{3}$$

と表せる。よって、

$$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OD} = \frac{\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} - 3\overrightarrow{d}}{3}$$

$$\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OC} = \frac{\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} - 3\overrightarrow{c} + \overrightarrow{d}}{3}$$

である。 G は線分 DE 上にあるから、 $0 < x < 1$ の実数 x を用いて

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OG} &= \overrightarrow{OD} + x\overrightarrow{DE} \\ &= \frac{x}{3}\overrightarrow{a} + \frac{x}{3}\overrightarrow{b} + \frac{x}{3}\overrightarrow{c} + (1-x)\overrightarrow{d} \end{aligned} \quad \dots \textcircled{1}$$

とかける。

同様に、 G は線分 CF 上にあるから、 $0 < y < 1$ の実数 y を用いて

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OG} &= \overrightarrow{OC} + y\overrightarrow{CF} \\ &= \frac{y}{3}\overrightarrow{a} + \frac{y}{3}\overrightarrow{b} + (1-y)\overrightarrow{c} + \frac{y}{3}\overrightarrow{d} \end{aligned} \quad \dots \textcircled{2}$$

とかける。ここで、 $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{d}$ は互いに一次独立であるので、 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ の係数を比較すると、

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{3}, \frac{x}{3} = 1 - y, 1 - x = \frac{y}{3} \Leftrightarrow x = y = \frac{3}{4}$$

とわかる。これを $\textcircled{1}$ に代入すると、

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} + \overrightarrow{d})$$

を得る。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{OG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} + \overrightarrow{d})$$

(3)

条件より G の座標は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0-1+3-2 \\ 0+3+0-3 \\ 4+0+0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となる。

よって

$$\overrightarrow{GA} = (0, 0, 3), \quad \overrightarrow{GB} = (-1, 3, -1), \quad \overrightarrow{GC} = (3, 0, -1)$$

であり、

$$|\overrightarrow{GA}| = 3, \quad |\overrightarrow{GB}| = \sqrt{11}, \quad |\overrightarrow{GC}| = \sqrt{10}$$

と求まる。

内積の定義から

$$\cos \angle AGB = \frac{\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB}}{|\overrightarrow{GA}| \cdot |\overrightarrow{GB}|} = \frac{-3}{3\sqrt{11}} = -\frac{1}{\sqrt{11}}$$

$$\cos \angle BGC = \frac{\overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC}}{|\overrightarrow{GB}| \cdot |\overrightarrow{GC}|} = \frac{-2}{\sqrt{11} \cdot \sqrt{10}} = -\frac{2}{\sqrt{110}}$$

$$\cos \angle CGA = \frac{\overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GA}}{|\overrightarrow{GC}| \cdot |\overrightarrow{GA}|} = \frac{-3}{3\sqrt{10}} = -\frac{1}{\sqrt{10}}$$

となる。よって、

$$\cos \angle BGC > \cos \angle AGB > \cos \angle CGA$$

である。 $0 < \angle AGB, \angle BGC, \angle CGA < \pi$ を考慮すると、求める大小関係は

$$\angle CGA > \angle AGB > \angle BGC$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \angle CGA > \angle AGB > \angle BGC$$

(1)

ケーリー・ハミルトンの定理より、

$$A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E = O \quad \dots \textcircled{1}$$

が成り立つ。また、条件式

$$A^2 - 4A + 3E = O \quad \dots \textcircled{2}$$

が成り立つ。①-②より、

$$\begin{aligned} \{A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E\} - (A^2 - 4A + 3E) &= O \\ \Leftrightarrow \{4 - (a+d)\}A &= \{3 - (ad-bc)\}E \quad \dots \textcircled{3} \end{aligned}$$

となる。

[1] $a+d=4$ のとき

③より

$$\begin{aligned} O &= \{3 - (ad-bc)\}E \\ \Leftrightarrow ad-bc &= 3 \end{aligned}$$

となる。よって、 $ad-bc=3$ となるように a, b, c, d を選べばよく、実際に

$$(a, b, c, d) = (3, 0, 0, 1)$$

とすれば、

$$\begin{aligned} A^2 - 4A + 3E &= \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 - 4 \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \\ &= O \end{aligned}$$

より②が成り立つので $a+d=4$ は適する。[2] $a+d \neq 4$ のとき

③より

$$A = \frac{3 - (ad-bc)}{4 - (a+d)} E \quad \dots \textcircled{4}$$

が得られる。したがって A は E の定数倍となるので、 k を実数として $A = kE$ とおける。

これを②に代入すると、

$$\begin{aligned} (k^2 - 4k + 3)E &= O \\ \Leftrightarrow (k-1)(k-3)E &= O \\ \Leftrightarrow k &= 1, 3 \end{aligned}$$

が得られる。 $k=1$ のとき

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \dots \textcircled{5}$$

となり、 $a+d=2$ である。 $k=3$ のとき

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \dots \textcircled{6}$$

となり、 $a+d=6$ である。以上[1], [2]より、 $a+d$ のとり得る値は 2, 4, 6 である。

(答) 2, 4, 6

(2)

[1] $a+d=4$ のとき

このとき③より

$$\begin{aligned} ad-bc &= 3 \\ \Leftrightarrow bc &= -3 + a(4-a) \\ \Leftrightarrow bc &= -(a-3)(a-1) \quad \dots \textcircled{7} \end{aligned}$$

を得る。ここで $b=c$ より $bc \geq 0$ であるので、

$$\begin{aligned} -(a-3)(a-1) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow 1 &\leq a \leq 3 \end{aligned}$$

が必要条件である。これを満たす整数 a は $a=1, 2, 3$ の 3 通りのみである。 $a=1$ のとき $a+d=4$, ⑦, $b=c$ の条件より

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

を得る。同様に、 $a=2$ のとき

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$

 $a=3$ のとき

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を得る。

[2] $a+d \neq 4$ のとき(1)より、 A の候補は⑤, ⑥の 2 種類のみである。これらは $b=c$ かつ a が整数という条件を満たしている。以上[1], [2]より、条件を満たすような A は

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

の 6 種類である。

$$(答) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(1)

$f(x)=1-x-\sin x$ とおく。

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{12}\right) &= 1 - \frac{\pi}{12} - \sin \frac{\pi}{12} \\ &= 1 - \frac{\pi}{12} - \sin \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) \\ &= 1 - \frac{\pi}{12} - \left(\sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} \right) \\ &= 1 - \frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \\ &= \frac{12 - 3\sqrt{6} + 3\sqrt{2} - \pi}{12} \end{aligned}$$

ここで、 $3.1 < \pi < 3.2, 1.4 < \sqrt{2} < 1.5, 2.4 < \sqrt{6} < 2.5$ に注意すると、

$$f\left(\frac{\pi}{12}\right) > \frac{12 - 3 \cdot 2.5 + 3 \cdot 1.4 - 3.2}{12} = \frac{5.5}{12} > 0$$

である。また、

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{4}\right) &= 1 - \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{4 - \pi - 2\sqrt{2}}{4} \\ &< \frac{4 - 3.1 - 2 \cdot 1.4}{4} \\ &= -\frac{1.9}{4} < 0 \end{aligned}$$

である。さらに、

$$f'(x) = -1 - \cos x < 0$$

なので、次の増減表を得る。

x	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{12}$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	正	$\searrow$	負

よって、 $f(x)=0$ は $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{12}$ の範囲に解を 1 つだけ持つ。

したがって、 $y=1-x$ と $y=\sin x$ は、 $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{12}$ の範囲でただ 1 つの交点を持つ。

(証明終)

(2)

数学的帰納法により $\frac{\pi}{12} < a_n < \frac{\pi}{4}$ を示す。

[1] $n=1$ のとき

$$\frac{\pi}{12} < a_1 < \frac{\pi}{4} \text{ なので成り立つ。}$$

[2] $n=k$ のとき

$$\frac{\pi}{12} < a_k < \frac{\pi}{4} \text{ を仮定する。このとき } a_{k+1} = 1 - \sin a_k \text{ であるから、}$$

$$\begin{aligned} a_{k+1} - \frac{\pi}{4} &< 1 - \sin \frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{4} \\ &= 1 - \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} - \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{4 - \sqrt{6} + \sqrt{2} - \pi}{4} \\ &< \frac{4 - 2.4 + 1.5 - 3.1}{4} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\therefore a_{k+1} < \frac{\pi}{4}$$

である。さらに、

$$\begin{aligned} a_{k+1} - \frac{\pi}{12} &> 1 - \sin \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{12} \\ &= 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi}{12} \\ &= \frac{12 - 6\sqrt{2} - \pi}{12} \\ &> \frac{12 - 6 \cdot 1.42 - 3.15}{12} \quad (\because \sqrt{2} < 1.42, \pi < 3.15) \\ &= \frac{0.33}{12} > 0 \end{aligned}$$

$$\therefore a_{k+1} > \frac{\pi}{12}$$

である。したがって、

$$\frac{\pi}{12} < a_{k+1} < \frac{\pi}{4}$$

となる。

以上[1], [2]より、全ての自然数 n について $\frac{\pi}{12} < a_n < \frac{\pi}{4}$ が成り立つ。

(証明終)

(3)

条件より、

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 1 - \sin a_n \\ \Leftrightarrow a_{n+1} - \alpha &= 1 - \sin a_n - (1 - \sin \alpha) \quad (\because \alpha = 1 - \sin \alpha) \\ \Leftrightarrow a_{n+1} - \alpha &= -(\sin a_n - \sin \alpha) \end{aligned} \quad \cdots \textcircled{1}$$

が成り立つ。

[1] $a_1 = \alpha$ のとき

①より、

$$\begin{aligned} a_2 - \alpha &= -(\sin \alpha - \sin \alpha) = 0 \\ \therefore a_2 &= \alpha \end{aligned}$$

となる。

よって、帰納的に全ての自然数 n について $a_n = \alpha$ となるので $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ が成り立つ。

[2] $a_1 \neq \alpha$ のとき

(1), (2)より $\frac{\pi}{12} < \alpha < \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{12} < a_n < \frac{\pi}{4}$ であり、 $\frac{\pi}{12} < x < \frac{\pi}{4}$ において $\sin x$ は単調増加関数であ

るから、①より $a_n \neq \alpha$ のとき $a_{n+1} \neq \alpha$ が成り立つ。したがって、 $a_1 \neq \alpha$ より帰納的に全ての自然数 n について $a_n \neq \alpha$ が成り立つ。

$\sin x$ は連続かつ微分可能な関数であるから、 a_n と α の間にある実数 β を用いて、

平均値の定理より①を次のように変形できる。

$$\begin{aligned} \textcircled{1} &\Leftrightarrow a_{n+1} - \alpha = -(a_n - \alpha) \cos \beta \\ \therefore |a_{n+1} - \alpha| &= |a_n - \alpha| \cos \beta \end{aligned}$$

さらに、 $\frac{\pi}{12} < \beta < \frac{\pi}{4}$ であるから、

$$\begin{aligned} |a_{n+1} - \alpha| &= |a_n - \alpha| \cos \beta \\ &< |a_n - \alpha| \cos \frac{\pi}{12} \end{aligned}$$

となる。これを繰り返し用いると、 $n \geq 2$ に対して

$$(0 <) |a_n - \alpha| < |a_1 - \alpha| \left(\cos \frac{\pi}{12} \right)^{n-1}$$

が成り立つことが分かる。ここで、

$$0 < \cos \frac{\pi}{12} < 1$$

であるから、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - \alpha| \left(\cos \frac{\pi}{12} \right)^{n-1} = 0$$

となる。よって、はさみうちの原理より、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - \alpha| &= 0 \\ \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \alpha \end{aligned}$$

が成り立つ。

以上[1], [2]より、題意は示された。

(証明終)