

2012 年度

M 3

数 学

2 月 25 日(土)

理 学 部 (数 学 科)

13:00 ~ 15:00

【前 期 日 程】

注 意 事 項

試験開始前

- 1 監督者の指示があるまで、問題冊子、解答用紙に手を触れないでください。
- 2 監督者の指示に従って、全部の解答用紙(4 枚)に受験番号を記入してください。

試験開始後

- 3 この問題冊子は、4 ページあります。はじめに、問題冊子、解答用紙を確かめ、枚数の不足や、印刷の不鮮明なもの、ページの落丁・乱丁があった場合は、手をあげて監督者に申し出てください。
- 4 解答は、すべて別紙解答用紙に記入してください。
- 5 解答スペースが不足するときは、解答用紙の裏面も使用することが出来ます。ただし、その場合は、表面に「裏へつづく」と明記してください。
- 6 問題は、声を出して読むはいけません。
- 7 各問ごとの配点は、比率(%)で表示してあります。

試験終了後

- 8 問題冊子は、必ず持ち帰ってください。

1 放物線 $y = x^2$ 上の 2 点 $A(a, a^2)$, $B(b, b^2)$ ($a < 0 < b$) における接線の交点を C とする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 点 C の座標を a, b を用いて表せ。
- (2) $\triangle ABC$ が正三角形のとき、 a, b の値を求めよ。またそのとき、線分 AC, BC と放物線 $y = x^2$ で囲まれた図形の面積を求めよ。
- (3) $\triangle ABC$ が $\angle A$ を直角とする直角二等辺三角形のとき、 a, b の値を求めよ。

(配点 25 %)

2 四面体 ABCD がある。△ABC, △ABD の重心をそれぞれ E, F とおき、線分 DE と線分 CF の交点を G とする。このとき、次の問いに答えよ。

(1) 線分 DE と線分 CF が交わる理由を述べよ。

(2) O を空間内の定点とし、 $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$, $\vec{d} = \overrightarrow{OD}$ とおく。このとき $\overrightarrow{OG}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ を用いて表せ。

(3) $A(0, 0, 4)$, $B(-1, 3, 0)$, $C(3, 0, 0)$, $D(-2, -3, 0)$ のとき、 $\angle AGB$, $\angle BGC$, $\angle CGA$ の大小関係を不等号を用いて表せ。

(配点 25 %)

3 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が

$$A^2 - 4A + 3E = O$$

を満たしている。ただし、 E は 2 次の単位行列、 O は 2 次の零行列とする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) $a + d$ のとり得るすべての値を求めよ。
- (2) a が整数で $b = c$ となるような A をすべて求めよ。

(配点 25 %)

4 a_1 を $\frac{\pi}{12} < a_1 < \frac{\pi}{4}$ を満たす数とし, $\{a_n\}$ を

$$a_{n+1} = 1 - \sin a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定められる数列とする。このとき, 次の問いに答えよ。

(1) 直線 $y = 1 - x$ と曲線 $y = \sin x$ は, $\frac{\pi}{12} < x < \frac{\pi}{4}$ の範囲でただ1つの交点をもつことを示せ。

(2) n を自然数とするととき, 不等式 $\frac{\pi}{12} < a_n < \frac{\pi}{4}$ を示せ。

(3) (1) の交点の x 座標を α とするとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ が成り立つことを示せ。

(配点 25 %)