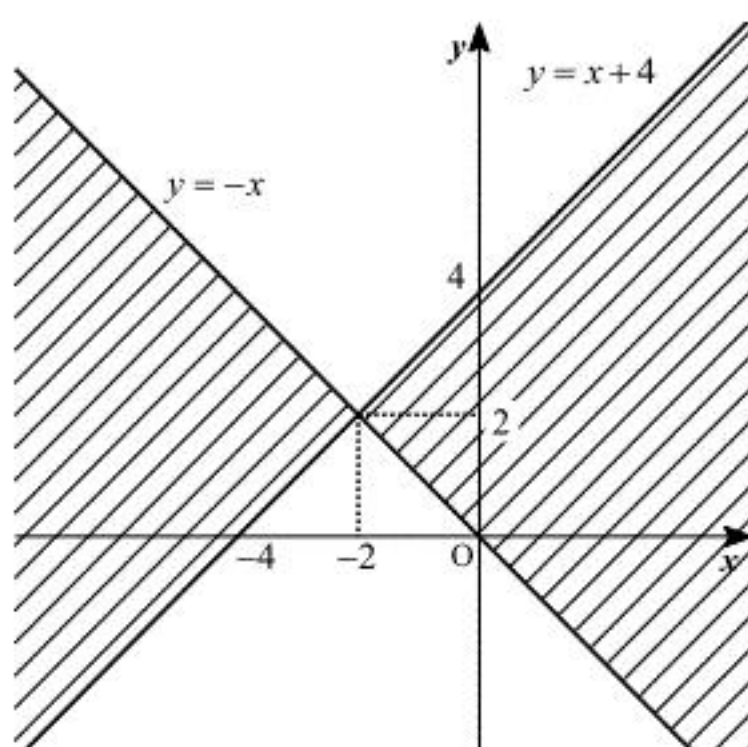


(1)

$$(x+y)(x-y+4) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y \geq -x \\ y \leq x+4 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} y \leq -x \\ y \geq x+4 \end{cases}$$

であるため、領域  $A$  は、下図の斜線部分である。ただし、境界を含む。



(答) 前図

(2)

$$\begin{cases} y = x^2 + 4x \\ y = -x \end{cases}$$

とすると、

$$\begin{aligned} x^2 + 4x &= -x \\ \Leftrightarrow x(x+5) &= 0 \\ \therefore x &= -5, 0 \end{aligned}$$

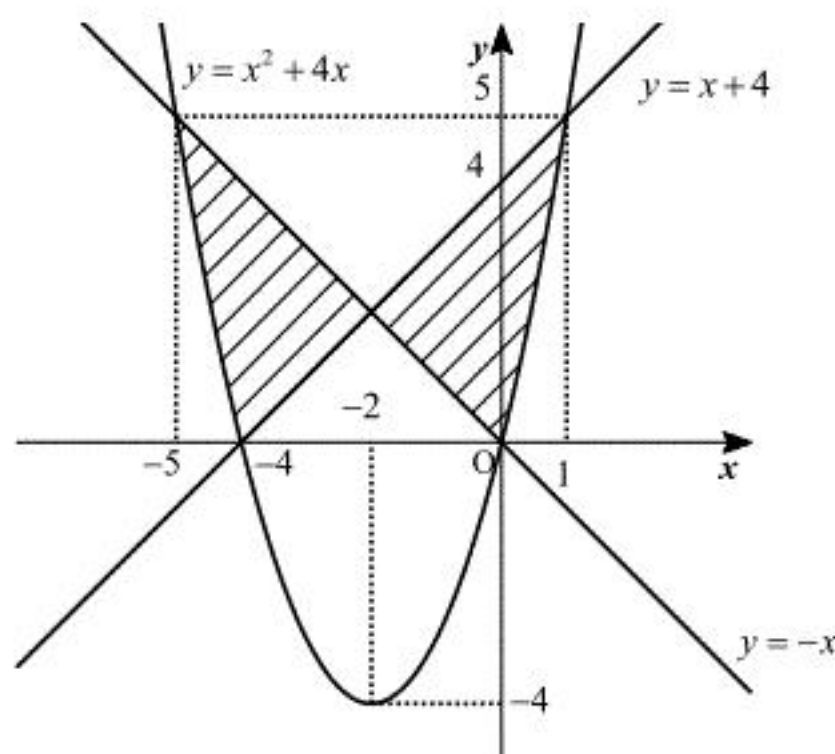
となるため、 $y = x^2 + 4x$  と  $y = -x$  の交点の座標は  $(-5, 5)$ ,  $(0, 0)$  であり、また、

$$\begin{cases} y = x^2 + 4x \\ y = x+4 \end{cases}$$

とすると、

$$\begin{aligned} x^2 + 4x &= x+4 \\ \Leftrightarrow x^2 + 3x - 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-1)(x+4) &= 0 \\ \therefore x &= -4, 1 \end{aligned}$$

となるため、 $y = x^2 + 4x$  と  $y = x+4$  の交点の座標は、 $(-4, 0)$ ,  $(1, 5)$  である。以上より、領域  $A \cap B$  は下図の斜線部分である。ただし、境界を含む。



直線  $y = x+4$  と直線  $y = -x$  は曲線  $y = x^2 + 4x$  の軸  $x = -2$  上で交わるため、斜線部分は  $x = -2$  に関して対称である。したがって、求める面積を  $S$  とおくと、

$$\begin{aligned} \frac{S}{2} &= \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 + \int_0^1 \{(x+4) - (x^2 + 4x)\} dx \\ &= 4 + \left[ -\frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + 4x \right]_0^1 \\ &= \frac{37}{6} \\ \therefore S &= \frac{37}{3} \end{aligned}$$

となる。

(答)  $\frac{37}{3}$ 

(3)

$$4x - y = k \Leftrightarrow y = 4x - k \quad \cdots \textcircled{1}$$

とおくと、①は傾き 4 で  $y$  切片  $-k$  の直線を表す。①と領域  $A \cap B$  が共有点を持つときの  $k$  の最大値と最小値を求めればよい。(2)の図より、①が点  $(-5, 5)$  を通るとき、 $k$  は最小となる。

このときの  $k$  の値は、

$$\begin{aligned} k &= 4 \cdot (-5) - 5 \\ &= -25 \end{aligned}$$

である。また、 $y = x^2 + 4x$  を微分すると、

$$y' = 2x + 4$$

となるため、

$$y' = 4 \Leftrightarrow x = 0$$

である。したがって、①が  $y = x^2 + 4x$  に接するとき、その接点の座標は  $(0, 0)$  である。ゆえに、①が点  $(0, 0)$  を通るとき、 $k$  は最大値 0 をとる。以上をまとめると、点  $(x, y)$  が領域  $A \cap B$  を動くとき、 $4x - y$  は、

$$\begin{aligned} (x, y) &= (0, 0) \text{ のとき、最大値 } 0 \\ (x, y) &= (-5, 5) \text{ のとき、最小値 } -25 \end{aligned}$$

をとる。

(答)  $(x, y) = (0, 0)$  のとき最大値 0,  $(x, y) = (-5, 5)$  のとき最小値  $-25$

(1)

条件より,

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA}$$

であるため,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ} &= \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} \\ &= -\frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{OB} \quad (\because \overrightarrow{OQ} = s\overrightarrow{OB})\end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{PQ} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{OB}$$

(2)

(1)の結果より,

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{PQ}|^2 &= \frac{1}{9}|\overrightarrow{OA}|^2 - \frac{2}{3}s\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + s^2|\overrightarrow{OB}|^2 \\ &= \frac{1}{9}|\overrightarrow{OA}|^2 - \frac{2}{3}ks + s^2\end{aligned}$$

と表せる。また,

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{AB}|^2 &= |\overrightarrow{OA}|^2 - 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + |\overrightarrow{OB}|^2 \\ &= |\overrightarrow{OA}|^2 - 2k + 1\end{aligned}$$

であるため,  $|\overrightarrow{PQ}| = \frac{1}{3}|\overrightarrow{AB}|$  が成り立つとき,

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{PQ}|^2 &= \frac{1}{9}|\overrightarrow{AB}|^2 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{9}|\overrightarrow{OA}|^2 - \frac{2}{3}ks + s^2 &= \frac{1}{9}|\overrightarrow{OA}|^2 - \frac{2}{9}k + \frac{1}{9} \\ \Leftrightarrow s^2 - \frac{2}{3}ks + \frac{2}{9}k - \frac{1}{9} &= 0 \\ \therefore 9s^2 - 6ks + 2k - 1 &= 0 \quad \dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

が成り立つ。

(証明終)

(3)

 $|\overrightarrow{PQ}| = \frac{1}{3}|\overrightarrow{AB}|$  を満たす点 Q が辺 OB 上にただ 1 つ存在するには,  $s$  の 2 次方程式①が $0 \leq s \leq 1$  の範囲にただ 1 つの実数解をもてばよい。ここで,

$$f(s) = 9s^2 - 6ks + 2k - 1$$

とおく。  $f(s) = 0$  の解の一つが  $s = 0$  であるとき,

$$\begin{aligned}f(0) &= 0 \\ \Leftrightarrow 2k - 1 &= 0 \\ \therefore k &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

となるが, このとき,

$$\begin{aligned}f(s) &= 0 \\ \Leftrightarrow 9s^2 - 3s &= 0 \\ \Leftrightarrow 9s\left(s - \frac{1}{3}\right) &= 0 \\ \therefore s &= 0, \frac{1}{3}\end{aligned}$$

となり,  $0 \leq s \leq 1$  に実数解を 2 つもってしまうため, 不適である。また,  $f(s) = 0$  の解の一つが  $s = 1$  のとき,

$$\begin{aligned}f(1) &= 0 \\ \Leftrightarrow 9 - 6k + 2k - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow 4k &= 8 \\ \therefore k &= 2\end{aligned}$$

となるが, このとき,

$$\begin{aligned}f(s) &= 0 \\ \Leftrightarrow 9s^2 - 12s + 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow 3(s-1)(3s-1) &= 0 \\ \therefore s &= 1, \frac{1}{3}\end{aligned}$$

となり,  $0 \leq s \leq 1$  に実数解を 2 つもってしまうため, 不適である。したがって, ①が  $0 < s < 1$  の範囲にただ 1 つの実数解をもつ条件を求めればよい。

$$\begin{aligned}f(s) &= 9s^2 - 6ks + 2k - 1 \\ &= 9\left(s - \frac{1}{3}k\right)^2 - k^2 + 2k - 1\end{aligned}$$

であるため, 放物線  $t = f(s)$  の軸は, 直線  $s = \frac{1}{3}k$  であり, 頂点の座標は,  $\left(\frac{1}{3}k, -k^2 + 2k - 1\right)$  で

ある。したがって, 求める条件は,

$$f(0) \cdot f(1) < 0 \quad \text{または} \quad \begin{cases} 0 \leq \frac{1}{3}k \leq 1 \\ -k^2 + 2k - 1 = 0 \end{cases}$$

である。ここで,

$$\begin{aligned}f(0)f(1) &< 0 \\ \Leftrightarrow (2k-1)(9-6k+2k-1) &< 0 \\ \Leftrightarrow (2k-1)(k-2) &> 0 \\ \therefore k &< \frac{1}{2}, 2 < k\end{aligned}$$

となり, また,

$$\begin{aligned}&\begin{cases} 0 \leq \frac{1}{3}k \leq 1 \\ -k^2 + 2k - 1 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} 0 \leq k \leq 3 \\ k = 1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &k = 1\end{aligned}$$

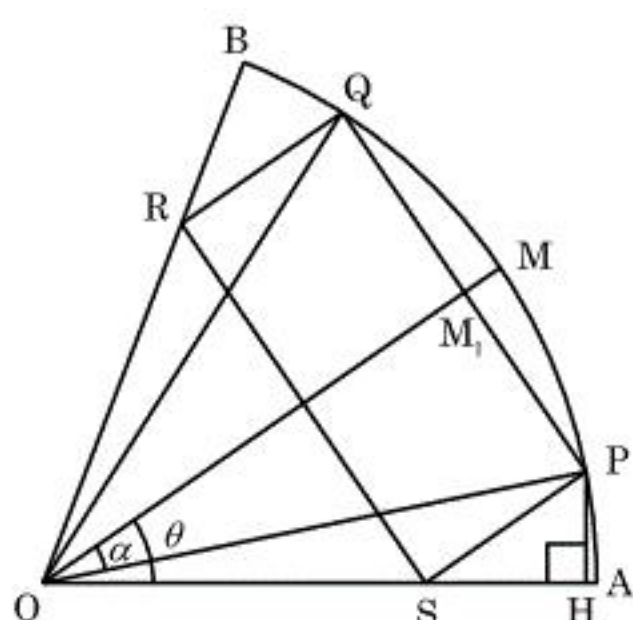
となる。以上より, 求める条件は,

$$k < \frac{1}{2}, k = 1, 2 < k$$

である。

$$(\text{答}) \quad k < \frac{1}{2}, k = 1, 2 < k$$

(1)



弧 AB 上に弧 AB を二等分するように M を定める。点 P から辺 OA に下ろした垂線の足を H とする。また、PQ と OM の交点を  $M_1$  とし、上図のように R, S を定めても一般性を失わない。対称性より、 $PS \parallel OM \parallel QR$  であるため、

$$\angle PSH = \theta$$

である。

$$PH = \sin(\theta - \alpha)$$

であるため、

$$\begin{aligned} PS &= \frac{PH}{\sin \theta} \\ &= \frac{\sin(\theta - \alpha)}{\sin \theta} \end{aligned}$$

となる。また、

$$PM_1 = \sin \alpha$$

であるため、長方形 PQRS の面積を  $T$  とおくと、

$$\begin{aligned} T &= PS \cdot 2PM_1 \\ &= \frac{\sin(\theta - \alpha)}{\sin \theta} \cdot 2\sin \alpha \\ &= \frac{2\sin \alpha \sin(\theta - \alpha)}{\sin \theta} \end{aligned}$$

と求まる。

$$\text{(答)} \quad \frac{2\sin \alpha \sin(\theta - \alpha)}{\sin \theta}$$

(2)

$\theta$  を定数として考えると、 $T$  が最大であるとき、

$$2\sin \alpha \sin(\theta - \alpha)$$

は最大である。積和公式より、

$$\begin{aligned} 2\sin \alpha \sin(\theta - \alpha) &= \cos(\alpha - \theta + \alpha) - \cos(\alpha + \theta - \alpha) \\ &= \cos(2\alpha - \theta) - \cos \theta \end{aligned}$$

と変形できる。 $0 < \alpha < \theta$  より、

$$-\theta < 2\alpha - \theta < \theta$$

であり、また、 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  であるため、 $\cos(2\alpha - \theta)$  は

$$\begin{aligned} 2\alpha - \theta &= 0 \\ \therefore \alpha &= \frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

のとき最大となる。すなわち、 $T$  を最大にする  $\alpha$  は  $\alpha = \frac{\theta}{2}$  である。

$$\text{(答)} \quad \alpha = \frac{\theta}{2}$$

(3)

(2) より、 $\theta = \frac{\pi}{3}$  のとき、 $\alpha = \frac{\pi}{6}$  で  $T$  は最大となるため、求める最大値は

$$\begin{aligned} T &= \frac{2\sin \frac{\pi}{6} \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right)}{\sin \frac{\pi}{3}} \\ &= \frac{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

である。

$$\text{(答)} \quad \frac{\sqrt{3}}{3}$$

以下では、複号同順とする。

(1)

$n$  を自然数とすると、ある自然数  $a$  と  $b$  を用いて、

$$(2 \pm \sqrt{3})^n = a \pm b\sqrt{3} \quad \cdots (*)$$

とかけを数学的帰納法によって示す。

[1]  $n=1$  のとき

$(a, b) = (2, 1)$  とすることで、 $(*)$  が成り立つ。

[2]  $n=k$  のとき、 $(*)$  が成り立つと仮定する。

すなわち、自然数  $a_k, b_k$  を用いて、

$$(2 \pm \sqrt{3})^k = a_k \pm b_k \sqrt{3}$$

が成り立つと仮定する。このとき、

$$\begin{aligned} (2 \pm \sqrt{3})^{k+1} &= (2 \pm \sqrt{3})^k (2 \pm \sqrt{3}) \\ &= (a_k \pm b_k \sqrt{3})(2 \pm \sqrt{3}) \\ &= (2a_k + 3b_k) \pm (a_k + 2b_k) \sqrt{3} \end{aligned}$$

となるが、 $2a_k + 3b_k, a_k + 2b_k$  はそれぞれ自然数であり、これらを

$$a_{k+1} = 2a_k + 3b_k, b_{k+1} = a_k + 2b_k$$

とおくと、

$$(2 \pm \sqrt{3})^{k+1} = a_{k+1} \pm b_{k+1} \sqrt{3}$$

となり、 $n=k+1$  のときも、 $(*)$  が成り立つ。

以上、[1], [2] より、すべての自然数  $n$  について、 $(*)$  が成り立つ。

(証明終)

(2)

(1) より、

$$\begin{aligned} a^2 - 3b^2 &= (a + b\sqrt{3})(a - b\sqrt{3}) \\ &= (2 + \sqrt{3})^n (2 - \sqrt{3})^n \\ &= \{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})\}^n \\ &= 1^n \\ &= 1 \end{aligned}$$

が成り立つ。

(証明終)

(3)

(2) より、

$$3b^2 = a^2 - 1$$

である。よって、

$$\begin{aligned} (2 \pm \sqrt{3})^n &= a \pm b\sqrt{3} \\ &= \sqrt{a^2} \pm \sqrt{3b^2} \quad (\because a, b > 0) \\ &= \sqrt{a^2} \pm \sqrt{a^2 - 1} \end{aligned}$$

となるため、 $a^2 = m$  (自然数) とおけば、

$$(2 \pm \sqrt{3})^n = \sqrt{m} \pm \sqrt{m-1}$$

とかける。

(証明終)