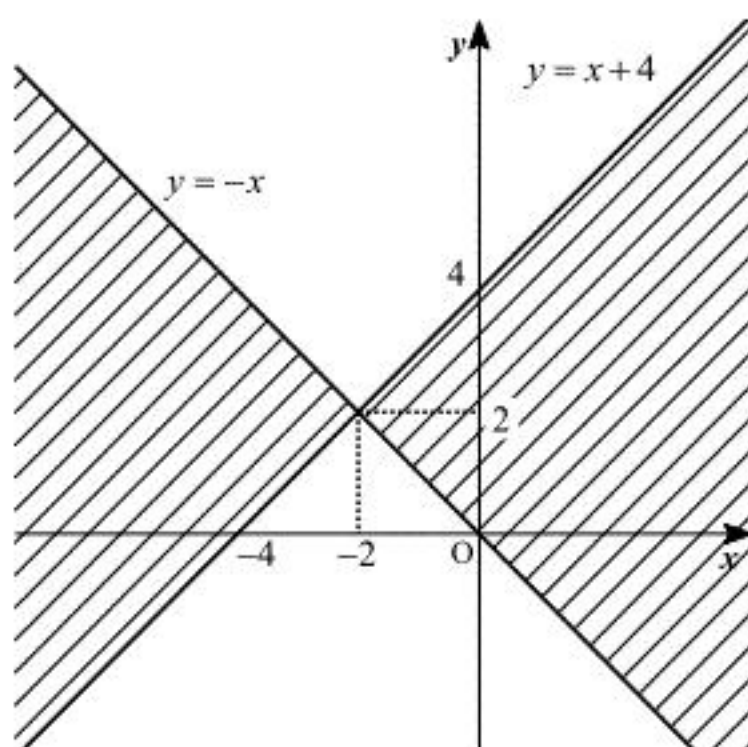


(1)

$$(x+y)(x-y+4) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y \geq -x \\ y \leq x+4 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} y \leq -x \\ y \geq x+4 \end{cases}$$

であるため、領域 A は、下図の斜線部分である。ただし、境界を含む。



(答) 前図

(2)

$$\begin{cases} y = x^2 + 4x \\ y = -x \end{cases}$$

とすると、

$$\begin{aligned} x^2 + 4x &= -x \\ \Leftrightarrow x(x+5) &= 0 \\ \therefore x &= -5, 0 \end{aligned}$$

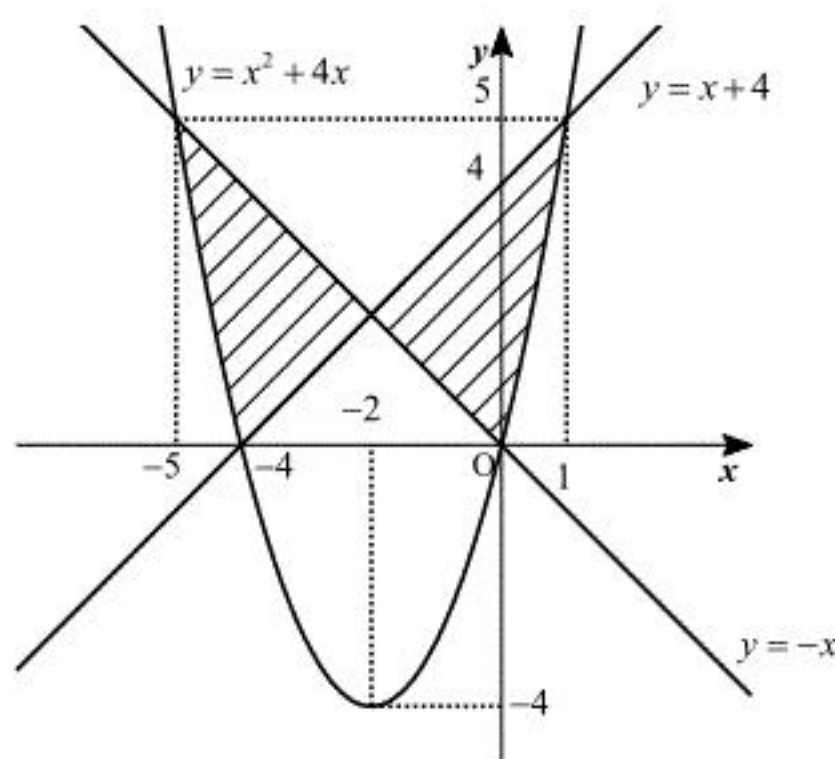
となるため、 $y = x^2 + 4x$ と $y = -x$ の交点の座標は $(-5, 5)$, $(0, 0)$ であり、また、

$$\begin{cases} y = x^2 + 4x \\ y = x+4 \end{cases}$$

とすると、

$$\begin{aligned} x^2 + 4x &= x+4 \\ \Leftrightarrow x^2 + 3x - 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-1)(x+4) &= 0 \\ \therefore x &= -4, 1 \end{aligned}$$

となるため、 $y = x^2 + 4x$ と $y = x+4$ の交点の座標は、 $(-4, 0)$, $(1, 5)$ である。以上より、領域 $A \cap B$ は下図の斜線部分である。ただし、境界を含む。



直線 $y = x+4$ と直線 $y = -x$ は曲線 $y = x^2 + 4x$ の軸 $x = -2$ 上で交わるため、斜線部分は $x = -2$ に関して対称である。したがって、求める面積を S とおくと、

$$\begin{aligned} \frac{S}{2} &= \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 + \int_0^1 \{(x+4) - (x^2 + 4x)\} dx \\ &= 4 + \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + 4x \right]_0^1 \\ &= \frac{37}{6} \\ \therefore S &= \frac{37}{3} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{37}{3}$

(3)

$$4x - y = k \Leftrightarrow y = 4x - k \quad \cdots \textcircled{1}$$

とおくと、①は傾き 4 で y 切片 $-k$ の直線を表す。①と領域 $A \cap B$ が共有点を持つときの k の最大値と最小値を求めればよい。(2)の図より、①が点 $(-5, 5)$ を通るとき、 k は最小となる。このときの k の値は、

$$\begin{aligned} k &= 4 \cdot (-5) - 5 \\ &= -25 \end{aligned}$$

である。また、 $y = x^2 + 4x$ を微分すると、

$$y' = 2x + 4$$

となるため、

$$y' = 4 \Leftrightarrow x = 0$$

である。したがって、①が $y = x^2 + 4x$ に接するとき、その接点の座標は $(0, 0)$ である。ゆえに、①が点 $(0, 0)$ を通るとき、 k は最大値 0 をとる。以上をまとめると、点 (x, y) が領域 $A \cap B$ を動くとき、 $4x - y$ は、

$$\begin{aligned} (x, y) &= (0, 0) \text{ のとき、最大値 } 0 \\ (x, y) &= (-5, 5) \text{ のとき、最小値 } -25 \end{aligned}$$

をとる。

(答) $(x, y) = (0, 0)$ のとき最大値 0, $(x, y) = (-5, 5)$ のとき最小値 -25

以下では、複号同順とする。

(1)

n を自然数とすると、ある自然数 a と b を用いて、

$$(2 \pm \sqrt{3})^n = a \pm b\sqrt{3} \quad \cdots (*)$$

とかけると、数学的帰納法によって示す。

[1] $n=1$ のとき

$(a, b) = (2, 1)$ とすること、 $(*)$ が成り立つ。

[2] $n=k$ のとき、 $(*)$ が成り立つと仮定する。

すなわち、自然数 a_k, b_k を用いて、

$$(2 \pm \sqrt{3})^k = a_k \pm b_k \sqrt{3}$$

が成り立つと仮定する。このとき、

$$\begin{aligned} (2 \pm \sqrt{3})^{k+1} &= (2 \pm \sqrt{3})^k (2 \pm \sqrt{3}) \\ &= (a_k \pm b_k \sqrt{3})(2 \pm \sqrt{3}) \\ &= (2a_k + 3b_k) \pm (a_k + 2b_k) \sqrt{3} \end{aligned}$$

となるが、 $2a_k + 3b_k, a_k + 2b_k$ はそれぞれ自然数であり、これらを

$$a_{k+1} = 2a_k + 3b_k, b_{k+1} = a_k + 2b_k$$

とおくと、

$$(2 \pm \sqrt{3})^{k+1} = a_{k+1} \pm b_{k+1} \sqrt{3}$$

となり、 $n=k+1$ のときも、 $(*)$ が成り立つ。

以上、[1], [2] より、すべての自然数 n について、 $(*)$ が成り立つ。

(証明終)

(2)

(1) より、

$$\begin{aligned} a^2 - 3b^2 &= (a + b\sqrt{3})(a - b\sqrt{3}) \\ &= (2 + \sqrt{3})^n (2 - \sqrt{3})^n \\ &= \{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})\}^n \\ &= 1^n \\ &= 1 \end{aligned}$$

が成り立つ。

(証明終)

(3)

(2) より、

$$3b^2 = a^2 - 1$$

である。よって、

$$\begin{aligned} (2 \pm \sqrt{3})^n &= a \pm b\sqrt{3} \\ &= \sqrt{a^2} \pm \sqrt{3b^2} \quad (\because a, b > 0) \\ &= \sqrt{a^2} \pm \sqrt{a^2 - 1} \end{aligned}$$

となるため、 $a^2 = m$ (自然数) とおけば、

$$(2 \pm \sqrt{3})^n = \sqrt{m} \pm \sqrt{m-1}$$

とかける。

(証明終)

以下、 $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする。

(1)

X の逆行列が存在するため、

$$\begin{aligned} \det X &\neq 0 \\ \Leftrightarrow a^2 + b^2 &\neq 0 \\ \Leftrightarrow (a, b) &\neq (0, 0) \end{aligned}$$

であり、このとき、

$$X^{-1} = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

であるため、

$$\begin{aligned} X^{-1}AX &= \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2a & -2b \\ -2b & 2a \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} -2a^2 - 2b^2 & -2ab + 2ab \\ 2ab - 2ab & 2b^2 + 2a^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $X^{-1}AX = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

(2)

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

とおく。ここで、自然数 n に対し、

$$B^n = \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \qquad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

が成り立つことを数学的帰納法によって示す。

[1] $n=1$ のとき、

$$\begin{pmatrix} (-2)^1 & 0 \\ 0 & 2^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = B$$

となるため、 $\textcircled{1}$ が成り立つ。

[2] $n=k$ のとき、 $\textcircled{1}$ が成り立つと仮定すると、

$$\begin{aligned} B^{k+1} &= B^k B \\ &= \begin{pmatrix} (-2)^k & 0 \\ 0 & 2^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (-2)^{k+1} & 0 \\ 0 & 2^{k+1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となり、 $n=k+1$ のときも $\textcircled{1}$ が成立する。

以上、[1], [2]より、すべての自然数 n において $\textcircled{1}$ が成り立つ。したがって、 n が正の偶数のとき、 $B^n = 2^n E$ であるため、

$$X^{-1}AX = B$$

の両辺を n 乗して、

$$\begin{aligned} (X^{-1}AX)^n &= B^n \\ \Leftrightarrow X^{-1}A^nX &= B^n \\ \Leftrightarrow A^n &= XB^nX^{-1} \\ \Leftrightarrow A^n &= X \cdot 2^n EX^{-1} \\ \Leftrightarrow A^n &= 2^n XX^{-1} \\ \Leftrightarrow A^n &= 2^n E \\ \therefore A^n &= \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$

(3)

$$(A^{-1})^n A^n = E$$

であるため、 A^n の逆行列が存在し、

$$(A^{-1})^n = (A^n)^{-1}$$

が成り立つ。したがって、(2)より

$$\begin{aligned} (A^{-1})^n &= \frac{1}{2^n \cdot 2^n} \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^{-n} & 0 \\ 0 & 2^{-n} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $(A^{-1})^n = \begin{pmatrix} 2^{-n} & 0 \\ 0 & 2^{-n} \end{pmatrix}$

(1)

$$\{c(x)\}^2 = \frac{1}{4}(e^{4x} + e^{-4x} + 2)$$

$$\{s(x)\}^2 = \frac{1}{4}(e^{4x} + e^{-4x} - 2)$$

であるため、

$$\{c(x)\}^2 - \{s(x)\}^2 = \frac{4}{4} = 1$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad \{c(x)\}^2 - \{s(x)\}^2 = 1$$

(2)

$$c'(x) = e^{2x} - e^{-2x}$$

$$= 2s(x)$$

$$s'(x) = e^{2x} + e^{-2x}$$

$$= 2c(x)$$

$$t'(x) = \frac{s'(x)c(x) - s(x)c'(x)}{\{c(x)\}^2}$$

$$= \frac{2\{c(x)\}^2 - 2\{s(x)\}^2}{\{c(x)\}^2}$$

$$= \frac{2}{\{c(x)\}^2} \quad (\because (1))$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad c'(x) = 2s(x), s'(x) = 2c(x), t'(x) = \frac{2}{\{c(x)\}^2}$$

(3)

$$c(\log \sqrt{2}) = \frac{1}{2} \left(2 + \frac{1}{2} \right)$$

$$= \frac{5}{4}$$

$$c(\log \sqrt{3}) = \frac{1}{2} \left(3 + \frac{1}{3} \right)$$

$$= \frac{5}{3}$$

$$s(\log \sqrt{2}) = \frac{1}{2} \left(2 - \frac{1}{2} \right)$$

$$= \frac{3}{4}$$

$$s(\log \sqrt{3}) = \frac{1}{2} \left(3 - \frac{1}{3} \right)$$

$$= \frac{4}{3}$$

であるため、

$$t(\log \sqrt{2}) = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{4}}$$

$$= \frac{3}{5}$$

$$t(\log \sqrt{3}) = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{5}{3}}$$

$$= \frac{4}{5}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad t(\log \sqrt{2}) = \frac{3}{5}, t(\log \sqrt{3}) = \frac{4}{5}$$

(4)

(1), (2), (3)より、

$$\begin{aligned} \int_{\log \sqrt{2}}^{\log \sqrt{3}} t(x) dx &= \int_{\log \sqrt{2}}^{\log \sqrt{3}} \frac{s(x)}{c(x)} dx \\ &= \int_{\log \sqrt{2}}^{\log \sqrt{3}} \frac{\frac{1}{2}c'(x)}{c(x)} dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\log \{c(x)\} \right]_{\log \sqrt{2}}^{\log \sqrt{3}} \\ &= \frac{1}{2} \left(\log \frac{5}{3} - \log \frac{5}{4} \right) \\ &= \frac{1}{2} \log \frac{4}{3} \end{aligned}$$

と求まる。また、

$$\begin{aligned} \int_{\log \sqrt{2}}^{\log \sqrt{3}} \{t(x)\}^2 dx &= \int_{\log \sqrt{2}}^{\log \sqrt{3}} \frac{\{s(x)\}^2}{\{c(x)\}^2} dx \\ &= \int_{\log \sqrt{2}}^{\log \sqrt{3}} \frac{\{c(x)\}^2 - 1}{\{c(x)\}^2} dx \\ &= \int_{\log \sqrt{2}}^{\log \sqrt{3}} \left[1 - \frac{1}{\{c(x)\}^2} \right] dx \\ &= \int_{\log \sqrt{2}}^{\log \sqrt{3}} \left\{ 1 - \frac{1}{2}t'(x) \right\} dx \\ &= \left[x - \frac{1}{2}t(x) \right]_{\log \sqrt{2}}^{\log \sqrt{3}} \\ &= \log \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \left(\frac{4}{5} - \frac{3}{5} \right) \\ &= \frac{1}{2} \log \frac{3}{2} - \frac{1}{10} \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad \int_{\log \sqrt{2}}^{\log \sqrt{3}} t(x) dx = \frac{1}{2} \log \frac{4}{3}, \int_{\log \sqrt{2}}^{\log \sqrt{3}} \{t(x)\}^2 dx = \frac{1}{2} \log \frac{3}{2} - \frac{1}{10}$$