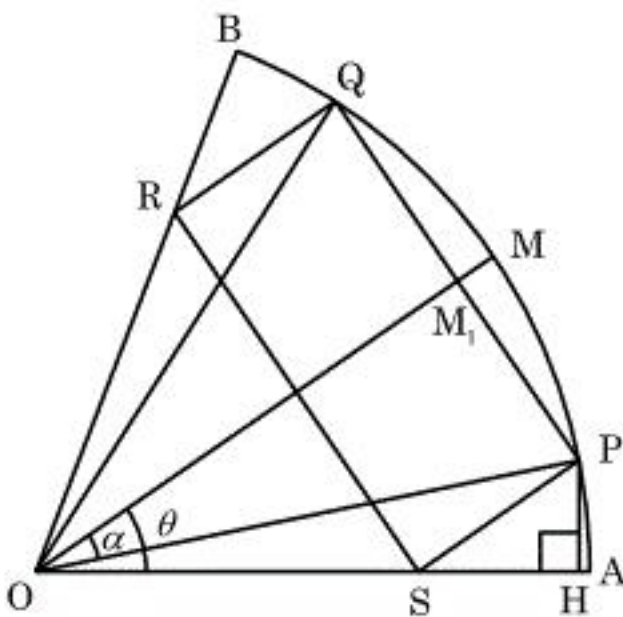


(1)



弧 AB 上に弧 AB を二等分するように M を定める。点 P から辺 OA に下ろした垂線の足を H とする。また、PQ と OM の交点を M_1 とし、上図のように R, S を定めても一般性を失わない。対称性より、 $PS \parallel OM \parallel QR$ であるため、

$$\angle PSH = \theta$$

である。また、

$$PH = \sin(\theta - \alpha)$$

となるため、

$$\begin{aligned} PS &= \frac{PH}{\sin \theta} \\ &= \frac{\sin(\theta - \alpha)}{\sin \theta} \end{aligned}$$

である。また、

$$PM_1 = \sin \alpha$$

となるため、長方形 PQRS の面積を T とおくと、

$$\begin{aligned} T &= PS \cdot 2PM_1 \\ &= \frac{\sin(\theta - \alpha)}{\sin \theta} \cdot 2\sin \alpha \\ &= \frac{2\sin \alpha \sin(\theta - \alpha)}{\sin \theta} \end{aligned}$$

である。 α を変数、 θ を定数とみて、 T を最大にする α を求めればよい。すなわち、

$$2\sin \alpha \sin(\theta - \alpha)$$

を最大にする α を求めればよい。積和公式より、

$$\begin{aligned} 2\sin \alpha \sin(\theta - \alpha) &= \cos(\alpha - \theta + \alpha) - \cos(\alpha + \theta - \alpha) \\ &= \cos(2\alpha - \theta) - \cos \theta \end{aligned}$$

と変形できる。 $0 < \alpha < \theta$ より、

$$-\theta < 2\alpha - \theta < \theta$$

であり、また、 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ であるため、 $\cos(2\alpha - \theta)$ は

$$\begin{aligned} 2\alpha - \theta &= 0 \\ \therefore \alpha &= \frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

のとき最大となる。すなわち、 T を最大にする α は $\alpha = \frac{\theta}{2}$ である。

(答) $\alpha = \frac{\theta}{2}$

(2)

(1)より、長方形 PQRS の面積は

$$\begin{aligned} T &= \frac{2\sin \alpha \sin(\theta - \alpha)}{\sin \theta} \\ &= \frac{2\sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2}}{\sin \theta} \\ &= \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} \end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta}$

(3)

長方形 PQRS が正方形のとき、(1)より、

$$\begin{aligned} PS &= PQ \\ \Leftrightarrow \frac{\sin(\theta - \alpha)}{\sin \theta} &= 2\sin \alpha \end{aligned}$$

が成り立つ。上式に $\alpha = \frac{\theta}{2}$ を代入して、

$$\begin{aligned} \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\sin \theta} &= 2\sin \frac{\theta}{2} \\ \Leftrightarrow \sin \theta &= \frac{1}{2} \left(\because \sin \frac{\theta}{2} \neq 0 \right) \\ \therefore \theta &= \frac{\pi}{6} \left(\because 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \right) \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $\theta = \frac{\pi}{6}$

以下では、複号同順とする。 n を自然数とすると、ある自然数 a_n と b_n を用いて、

$$(2 \pm \sqrt{3})^n = a_n \pm b_n \sqrt{3} \quad \cdots (*)$$

と表せることを数学的帰納法によって示す。

[1] $n=1$ のとき、

$(a_1, b_1) = (2, 1)$ とすることで、 $(*)$ が成り立つ。

[2] $n=k$ のとき、 $(*)$ が成り立つと仮定すると、

$$\begin{aligned} (2 \pm \sqrt{3})^{k+1} &= (2 \pm \sqrt{3})^k (2 \pm \sqrt{3}) \\ &= (a_k \pm b_k \sqrt{3})(2 \pm \sqrt{3}) \\ &= (2a_k + 3b_k) \pm (a_k + 2b_k) \sqrt{3} \end{aligned}$$

となるが、 $2a_k + 3b_k$, $a_k + 2b_k$ はそれぞれ自然数であり、これらを

$$a_{k+1} = 2a_k + 3b_k, \quad b_{k+1} = a_k + 2b_k$$

とおくと、

$$(2 \pm \sqrt{3})^{k+1} = a_{k+1} \pm b_{k+1} \sqrt{3}$$

となり、 $n=k+1$ のときも、 $(*)$ が成り立つ。

以上、[1], [2] より、すべての自然数 n について、 $(*)$ が成り立つ。したがって、

$$\begin{aligned} a_n^2 - 3b_n^2 &= (a_n + b_n \sqrt{3})(a_n - b_n \sqrt{3}) \\ &= (2 + \sqrt{3})^n (2 - \sqrt{3})^n \\ &= 1 \end{aligned}$$

が成り立つため、

$$3b_n^2 = a_n^2 - 1$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} (2 - \sqrt{3})^n &= a_n - b_n \sqrt{3} \\ &= \sqrt{a_n^2 - 3b_n^2} \quad (\because a_n, b_n > 0) \\ &= \sqrt{a_n^2 - a_n^2 + 1} \end{aligned}$$

となるため、 $a_n^2 = m$ (自然数) とおけば、

$$(2 - \sqrt{3})^n = \sqrt{m} - \sqrt{m-1}$$

とかけることが示された。

3

(1)

$$f(x) = \frac{1 - e^{-4x}}{1 + e^{-4x}}$$

であるため、

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{1-0}{1+0} = 1$$

となる。また、

$$f(x) = \frac{e^{4x} - 1}{e^{4x} + 1}$$

であるため、

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{0-1}{0+1} = -1$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2e^{2x} + 2e^{-2x})(e^{2x} + e^{-2x}) - (e^{2x} - e^{-2x})(2e^{2x} - 2e^{-2x})}{(e^{2x} + e^{-2x})^2} \\ &= \frac{8}{(e^{2x} + e^{-2x})^2} \\ f''(x) &= \frac{-8 \cdot 2 \cdot (e^{2x} + e^{-2x})(2e^{2x} - 2e^{-2x})}{(e^{2x} + e^{-2x})^4} \\ &= -\frac{32(e^{2x} - e^{-2x})}{(e^{2x} + e^{-2x})^3} \end{aligned}$$

となるため、 $f''(x) = 0$ となる x の値は、

$$\begin{aligned} f''(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow e^{2x} - e^{-2x} &= 0 \\ \Leftrightarrow 2x &= -2x \\ \therefore x &= 0 \end{aligned}$$

と求まる。

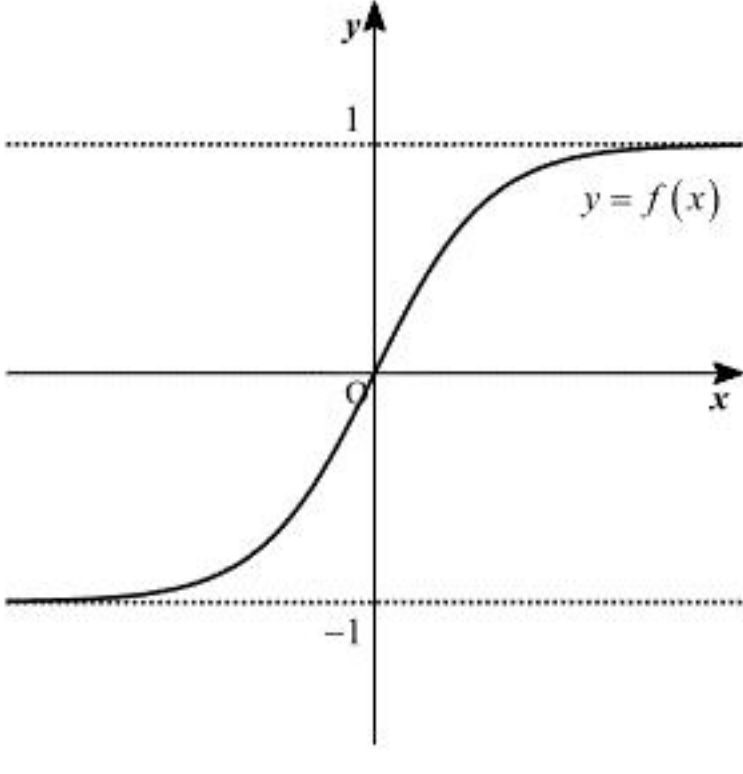
$$(\text{答}) \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1, f''(x) = 0 \text{ となる } x \text{ の値: } x = 0$$

(2)

(1)より、 $f(x)$ の増減、曲線 C の凹凸は下表の通りである。

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f''(x)$	+	0	-
$f'(x)$	+	+	+
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$

したがって、曲線 C の概形は次の図の通りである。



(答) 前図

(3)

(1)より、

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \\ \Leftrightarrow \frac{8}{(e^{2x} + e^{-2x})^2} &= 2 \\ \Leftrightarrow (e^{2x} + e^{-2x})^2 &= 4 \\ \Leftrightarrow e^{2x} + e^{-2x} &= 2 \quad (\because e^{2x} + e^{-2x} > 0) \\ \Leftrightarrow e^{4x} + 1 &= 2e^{2x} \\ \Leftrightarrow (e^{2x} - 1)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow e^{2x} &= 1 \\ \therefore x &= 0 \end{aligned}$$

となるため、傾きが2の接線 ℓ と曲線 C の接点は原点である。よって、接線 ℓ の方程式は、

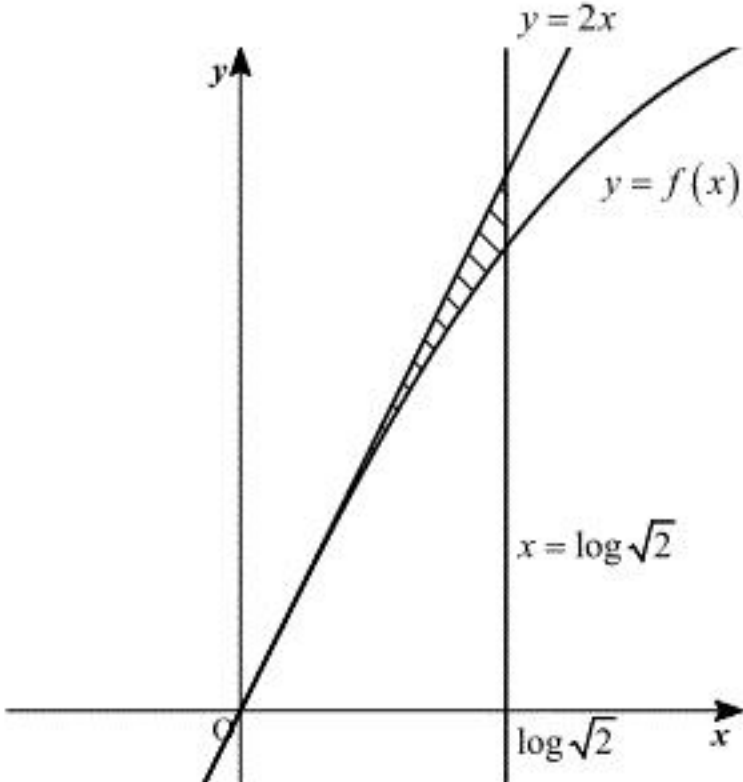
$$y = 2x$$

である。

(答) $y = 2x$

(4)

領域 D は下図の斜線部である。



したがって、求める面積を S とおくと、

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\log \sqrt{2}} \left(2x - \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{e^{2x} + e^{-2x}} \right) dx \\ &= \left[x^2 \right]_0^{\log \sqrt{2}} - \frac{1}{2} \int_0^{\log \sqrt{2}} \frac{(e^{2x} + e^{-2x})'}{e^{2x} + e^{-2x}} dx \\ &= (\log \sqrt{2})^2 - \frac{1}{2} \left[\log(e^{2x} + e^{-2x}) \right]_0^{\log \sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{4} (\log 2)^2 - \frac{1}{2} \left\{ \log \left(2 + \frac{1}{2} \right) - \log(1+1) \right\} \\ &= \frac{1}{4} (\log 2)^2 + \log 2 - \frac{1}{2} \log 5 \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \frac{1}{4} (\log 2)^2 + \log 2 - \frac{1}{2} \log 5$$

(5)

求める体積を V とすると、

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{\log \sqrt{2}} \left\{ (2x)^2 - \left(\frac{e^{2x} - e^{-2x}}{e^{2x} + e^{-2x}} \right)^2 \right\} dx \\ &= \pi \left[\frac{4}{3} x^3 \right]_0^{\log \sqrt{2}} - \pi \int_0^{\log \sqrt{2}} \frac{(e^{2x} + e^{-2x})^2 - 4}{(e^{2x} + e^{-2x})^2} dx \\ &= \frac{4}{3} \pi (\log \sqrt{2})^3 - \pi \int_0^{\log \sqrt{2}} \left\{ 1 - \frac{1}{2} f'(x) \right\} dx \\ &= \frac{\pi}{6} (\log 2)^3 - \pi \left[x - \frac{1}{2} f(x) \right]_0^{\log \sqrt{2}} \\ &= \frac{\pi}{6} (\log 2)^3 - \pi \log \sqrt{2} + \frac{\pi}{2} \cdot \frac{2 - \frac{1}{2}}{2 + \frac{1}{2}} \\ &= \pi \left\{ \frac{1}{6} (\log 2)^3 - \frac{1}{2} \log 2 + \frac{3}{10} \right\} \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \pi \left\{ \frac{1}{6} (\log 2)^3 - \frac{1}{2} \log 2 + \frac{3}{10} \right\}$$

(1)

$$A - \alpha E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

であるため、

$$\begin{aligned} (A - \alpha E)^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= O \end{aligned}$$

となることが示された。

(証明終)

(2)

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \text{とおくと,}$$

$$\begin{aligned} A - \alpha E &= B \\ \Leftrightarrow A &= B + \alpha E \end{aligned}$$

と表せる。(1)より、 $m \geq 2$ なる整数 m に対して、

$$B^m = O$$

が成り立つ。したがって、 $n \geq 2$ のとき、

$$\begin{aligned} A^n &= (B + \alpha E)^n \\ &= B^n + {}_nC_1 B^{n-1} \alpha E + \cdots + {}_nC_{n-1} B \alpha^{n-1} E^{n-1} + \alpha^n E^n \\ &= n \alpha^{n-1} B + \alpha^n E \\ &= \alpha^{n-1} \begin{pmatrix} n + \alpha & n \\ -n & -n + \alpha \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と求まる。上式は $n=1$ のときも成立するため、すべての自然数 n に対し、

$$A^n = \alpha^{n-1} \begin{pmatrix} n + \alpha & n \\ -n & -n + \alpha \end{pmatrix}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad A^n = \alpha^{n-1} \begin{pmatrix} n + \alpha & n \\ -n & -n + \alpha \end{pmatrix}$$

(3)

$$\begin{aligned} A^n \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow (A^n - E) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。したがって、自明な解として、

$$(x, y) = (0, 0)$$

がある。ここで、非自明な解、すなわち $(x, y) \neq (0, 0)$ なる解があると仮定する。このとき、

$A^n - E$ の行列式 $\det(A^n - E)$ が0となる。

$$\begin{aligned} \det(A^n - E) &= \{(n + \alpha)\alpha^{n-1} - 1\} \{(\alpha - n)\alpha^{n-1} - 1\} + \alpha^{2(n-1)} n^2 \\ &= (\alpha^n - 1)^2 \end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned} \det(A^n - E) &= 0 \\ \Leftrightarrow \alpha^n &= 1 \end{aligned}$$

である。 n の偶奇で場合分けをして考える。以下、複号同順とする。

[1] n が偶数のとき、

$$\alpha^n = 1 \Leftrightarrow \alpha = \pm 1$$

である。このとき、

$$A^n - E = \begin{pmatrix} \pm n & \pm n \\ \mp n & \mp n \end{pmatrix}$$

となるため、

$$\begin{aligned} (A^n - E) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \pm n(x + y) = 0 \\ \mp n(x + y) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

となる。よって、 x, y は $x + y = 0$ を満たす。

[2] n が奇数のとき、

$$\alpha^n = 1 \Leftrightarrow \alpha = 1$$

である。このとき、

$$A^n - E = \begin{pmatrix} n & n \\ -n & -n \end{pmatrix}$$

となるため、

$$\begin{aligned} (A^n - E) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} n(x + y) = 0 \\ -n(x + y) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

となる。よって、 x, y は $x + y = 0$ を満たす。

以上、[1], [2]より、求める解は (x, y) は

n が偶数のとき、

$$\alpha = \pm 1 \text{のとき, } (x, y) = (t, -t)$$

$$\alpha \neq \pm 1 \text{のとき, } (x, y) = (0, 0)$$

n が奇数のとき、

$$\alpha = 1 \text{のとき, } (x, y) = (t, -t)$$

$$\alpha \neq 1 \text{のとき, } (x, y) = (0, 0)$$

である。ただし、 t は任意の実数である。

(答) 前述