

2013 年度

M 1

数 学

2 月 25 日 (月)

【前 期 日 程】

教 育 学 部

理 学 部 (生物科学科, 地球科学科)

農 学 部

13 : 00 ~ 14 : 20

注 意 事 項

試験開始前

- 1 監督者の指示があるまで, 問題冊子, 解答用紙に手を触れないでください。
- 2 監督者の指示に従って, 全部の解答用紙 (4 枚) に受験番号を記入してください。

試験開始後

- 3 この問題冊子は, 4 ページあります。はじめに, 問題冊子, 解答用紙を確かめ, 枚数の不足や, 印刷の不鮮明なもの, ページの落丁・乱丁があった場合は, 手をあげて監督者に申し出てください。
- 4 解答は, すべて別紙解答用紙に記入してください。
- 5 解答スペースが不足するときは, 解答用紙の裏面も使用することが出来ます。ただし, その場合は, 表面に「裏へつづく」と明記してください。
- 6 問題は, 声を出して読むはいけません。
- 7 各問ごとの配点は, 比率 (%) で表示してあります。

試験終了後

- 8 問題冊子は, 必ず持ち帰ってください。

1 不等式 $(x+y)(x-y+4) \geq 0$ の表す領域を A とし、不等式 $y \geq x^2 + 4x$ の表す領域を B とする。このとき、次の問いに答えよ。

(1) 領域 A を図示せよ。

(2) 領域 $A \cap B$ の面積を求めよ。

(3) 点 (x, y) が領域 $A \cap B$ を動くとき、 $4x - y$ の最大値と最小値を求めよ。また、それらの値をとるときの x と y の値もそれぞれ求めよ。

(配点 25 %)

2 $\triangle OAB$ において、辺 OA を $1:2$ に内分する点を P 、辺 OB の長さを 1 、内積 $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = k$ とする。このとき、辺 OB 上の点 Q に関して、次の問いに答えよ。

- (1) $\vec{OQ} = s\vec{OB}$ ($0 \leq s \leq 1$) のとき、 $\vec{PQ}$ を $\vec{OA}$, $\vec{OB}$ と s を用いて表せ。
- (2) $\vec{OQ} = s\vec{OB}$ ($0 \leq s \leq 1$) かつ $|\vec{PQ}| = \frac{1}{3}|\vec{AB}|$ のとき、等式 $9s^2 - 6ks + 2k - 1 = 0$ が成り立つことを示せ。
- (3) $|\vec{PQ}| = \frac{1}{3}|\vec{AB}|$ を満たす点 Q が辺 OB 上にただ 1 つ存在するような k の値の範囲を求めよ。ただし、点 Q が辺 OB 上に存在するとは、 Q が O または B と一致する場合を含むものとする。

(配点 25 %)

3 半径 $OA = OB = 1$, 中心角 $\angle AOB = 2\theta$ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) の扇形 OAB に内接し, その2辺が弦 AB と平行であるような長方形 $PQRS$ について考える。頂点 P と Q は弧 AB 上に, 残りの2頂点はそれぞれ辺 OA と OB 上にあるとして, $\angle POQ = 2\alpha$ とする。このとき, 次の問いに答えよ。

(1) 長方形 $PQRS$ の面積を, α と θ の三角比を用いて表せ。

(2) 長方形 $PQRS$ の面積が最大になるときの α を θ で表せ。

(3) $\theta = \frac{\pi}{3}$ のとき, 長方形 $PQRS$ の面積の最大値を求めよ。

(配点 25 %)

4 次の問いに答えよ。

(1) n を自然数とすると、ある自然数 a と b を用いて、

$$(2 + \sqrt{3})^n = a + b\sqrt{3}, \quad (2 - \sqrt{3})^n = a - b\sqrt{3}$$

とかけることを、数学的帰納法を使って示せ。

(2) (1) の a と b について、 $a^2 - 3b^2 = 1$ が成り立つことを示せ。

(3) n を自然数とすると、ある自然数 m を用いて、

$$(2 + \sqrt{3})^n = \sqrt{m} + \sqrt{m-1}, \quad (2 - \sqrt{3})^n = \sqrt{m} - \sqrt{m-1}$$

とかけることを示せ。

(配点 25 %)