

2013 年度

M 2

数 学

2 月 25 日 (月)

【前 期 日 程】

情 報 学 部 (情報科学科)

理 学 部 (物理学科, 化学科)

工 学 部

13 : 00 ~ 15 : 00

注 意 事 項

試験開始前

- 1 監督者の指示があるまで、問題冊子、解答用紙に手を触れないでください。
- 2 監督者の指示に従って、全部の解答用紙 (4 枚) に受験番号を記入してください。

試験開始後

- 3 この問題冊子は、4 ページあります。はじめに、問題冊子、解答用紙を確かめ、枚数の不足や、印刷の不鮮明なもの、ページの落丁・乱丁があった場合は、手をあげて監督者に申し出てください。
- 4 解答は、すべて別紙解答用紙に記入してください。
- 5 解答スペースが不足するときは、解答用紙の裏面も使用することが出来ます。ただし、その場合は、表面に「裏へつづく」と明記してください。
- 6 問題は、声を出して読むはいけません。
- 7 各問ごとの配点は、比率 (%) で表示してあります。

試験終了後

- 8 問題冊子は、必ず持ち帰ってください。

1 不等式 $(x+y)(x-y+4) \geq 0$ の表す領域を A とし、不等式 $y \geq x^2 + 4x$ の表す領域を B とする。このとき、次の問いに答えよ。

(1) 領域 A を図示せよ。

(2) 領域 $A \cap B$ の面積を求めよ。

(3) 点 (x, y) が領域 $A \cap B$ を動くとき、 $4x - y$ の最大値と最小値を求めよ。また、それらの値をとるときの x と y の値もそれぞれ求めよ。

(配点 25 %)

2 次の問いに答えよ。

(1) n を自然数とすると、ある自然数 a と b を用いて、

$$(2 + \sqrt{3})^n = a + b\sqrt{3}, \quad (2 - \sqrt{3})^n = a - b\sqrt{3}$$

とかけられることを、数学的帰納法を使って示せ。

(2) (1) の a と b について、 $a^2 - 3b^2 = 1$ が成り立つことを示せ。

(3) n を自然数とすると、ある自然数 m を用いて、

$$(2 + \sqrt{3})^n = \sqrt{m} + \sqrt{m-1}, \quad (2 - \sqrt{3})^n = \sqrt{m} - \sqrt{m-1}$$

とかけられることを示せ。

(配点 25 %)

3 a と b を実数とする。2 次正方行列

$$X = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

の逆行列が存在するとし、 A を等式

$$AX = \begin{pmatrix} -2a & -2b \\ -2b & 2a \end{pmatrix}$$

を満たす 2 次正方行列とする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) $X^{-1}AX$ を求めよ。
- (2) n が正の偶数のとき、 A^n を求めよ。
- (3) n が正の偶数のとき、 $(A^{-1})^n$ を求めよ。

(配点 25 %)

4 関数

$$c(x) = \frac{1}{2}(e^{2x} + e^{-2x}), \quad s(x) = \frac{1}{2}(e^{2x} - e^{-2x}), \quad t(x) = \frac{s(x)}{c(x)}$$

に対して、次の問いに答えよ。

- (1) $\{c(x)\}^2 - \{s(x)\}^2$ を計算せよ。
- (2) 導関数 $c'(x)$, $s'(x)$, $t'(x)$ を、それぞれ $c(x)$ または $s(x)$ を用いて表せ。
- (3) $t(\log \sqrt{2})$ と $t(\log \sqrt{3})$ の値を求めよ。
- (4) 定積分 $\int_{\log \sqrt{2}}^{\log \sqrt{3}} t(x) dx$ と $\int_{\log \sqrt{2}}^{\log \sqrt{3}} \{t(x)\}^2 dx$ を求めよ。

(配点 25 %)