

2013 年度

M 3

数 学

2 月 25 日(月)

理 学 部 (数 学 科)

13:00 ~ 15:00

【前 期 日 程】

注 意 事 項

試験開始前

- 1 監督者の指示があるまで、問題冊子、解答用紙に手を触れないでください。
- 2 監督者の指示に従って、全部の解答用紙(4 枚)に受験番号を記入してください。

試験開始後

- 3 この問題冊子は、4 ページあります。はじめに、問題冊子、解答用紙を確かめ、枚数の不足や、印刷の不鮮明なもの、ページの落丁・乱丁があった場合は、手をあげて監督者に申し出てください。
- 4 解答は、すべて別紙解答用紙に記入してください。
- 5 解答スペースが不足するときは、解答用紙の裏面も使用することが出来ます。ただし、その場合は、表面に「裏へつづく」と明記してください。
- 6 問題は、声を出して読むはいけません。
- 7 各問ごとの配点は、比率(%)で表示してあります。

試験終了後

- 8 問題冊子は、必ず持ち帰ってください。

1 半径 $OA = OB = 1$, 中心角 $\angle AOB = 2\theta$ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) の扇形 OAB がある。長方形 $PQRS$ は、扇形 OAB に内接し、その 2 辺が弦 AB と平行であるような長方形の中で面積が最大のものである。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 頂点 P と Q が弧 AB 上にあるとして、 $\angle POQ = 2\alpha$ とするとき、 α を θ で表せ。
- (2) 長方形 $PQRS$ の面積を θ の三角比を用いて表せ。
- (3) 長方形 $PQRS$ が正方形であるときの θ の値を求めよ。

(配点 25 %)

2 n を自然数とすると、 $(2 - \sqrt{3})^n$ は $\sqrt{m} - \sqrt{m-1}$ (m は自然数) の形で表されることを示せ。

(配点 25 %)

3 関数 $f(x) = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{e^{2x} + e^{-2x}}$ に対して、曲線 $y = f(x)$ を C とする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 極限值 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ と $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, および, $f''(x) = 0$ を満たす x の値を求めよ。
- (2) 曲線 C の概形をかけ。
- (3) 曲線 C について、傾きが 2 の接線 ℓ の方程式を求めよ。
- (4) 曲線 C , (3) で求めた接線 ℓ , 直線 $x = \log \sqrt{2}$ によって囲まれた図形 D の面積を求めよ。
- (5) (4) の図形 D を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ。

(配点 25 %)

4 n を自然数とする。 α を実数とし、 $A = \begin{pmatrix} \alpha+1 & 1 \\ -1 & \alpha-1 \end{pmatrix}$ とする。このとき、次の問いに答えよ。

(1) $(A - \alpha E)^2 = O$ であることを示せ。ただし、 E は 2 次単位行列、 O は 2 次零行列とする。

(2) A^n を求めよ。

(3) 連立 1 次方程式 $A^n \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ の解 x, y をすべて求めよ。

(配点 25 %)