1

(1)

$$\angle BAC = \angle BAP + \angle PAC$$
$$= \theta + 2\theta$$
$$= 3\theta$$

である。3 倍角の定理により,

$$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$
$$= \frac{7}{128}$$

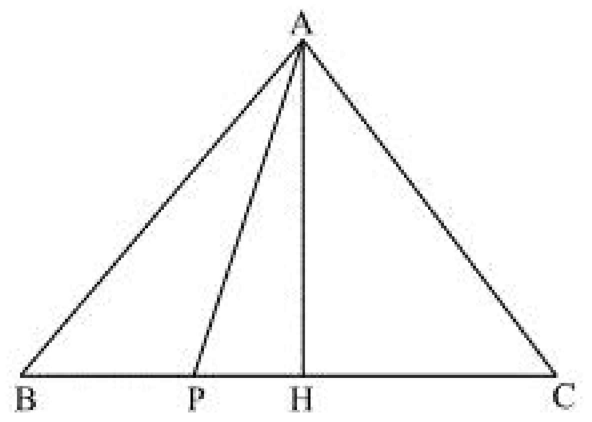
であるので, 三角形 ABC について余弦定理より,

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB\cdot AC\cos\angle BAC$$
$$= 121$$
$$\therefore BC = 11\ (\because BC > 0)$$

となる。

(答) $BC = 11$

(2)



上図の通り, $AH \perp BC$ となるように点 H を定める。このとき, △BAP の面積および△PAC の面積を AH を用いて表すと,

$$\triangle BAP = \frac{1}{2}\cdot BP\cdot AH$$

$$\triangle PAC = \frac{1}{2}\cdot PC\cdot AH$$

となる。一方, これらを AP および θ を用いて表すと,

$$\triangle BAP = \frac{1}{2}\cdot 8\cdot AP\cdot \sin\theta \quad \cdots ①$$

$$\triangle PAC = \frac{1}{2}\cdot 8\cdot AP\cdot \sin 2\theta \quad \cdots ②$$

となるから,

$$\triangle BAP : \triangle PAC = \left(\frac{1}{2}\cdot BP\cdot AH\right):\left(\frac{1}{2}\cdot PC\cdot AH\right) = \left(\frac{1}{2}\cdot 8\cdot AP\cdot \sin\theta\right):\left(\frac{1}{2}\cdot 8\cdot AP\cdot \sin 2\theta\right)$$

$$\therefore BP : PC = \sin\theta : \sin 2\theta$$
$$= \sin\theta : 2\sin\theta\cos\theta$$
$$= 1 : 2\cos\theta$$
$$= 1 : \frac{7}{4}$$
$$= 4 : 7$$

である。

(答) $BP : CP = 4 : 7$

(3)

$BH = \frac{11}{2}$ であるので, △ABH に三平方の定理を適用すると,

$$AH = \sqrt{64 - \frac{121}{4}} = \frac{3\sqrt{15}}{2}$$

となる。このとき, △ABC の面積は,

$$\triangle ABC = \frac{1}{2}\cdot BC\cdot AH = \frac{1}{2}\cdot 11\cdot \frac{3\sqrt{15}}{2} = \frac{33\sqrt{15}}{4}$$

である。一方, ①, ②式より,

$$\triangle ABC = \triangle BAP + \triangle PAC$$
$$= \frac{1}{2}\cdot 8\cdot AP\cdot \sin\theta + \frac{1}{2}\cdot 8\cdot AP\cdot \sin 2\theta$$
$$= 4AP\sin\theta(1 + 2\cos\theta)$$
$$= \frac{11\sqrt{15}}{8}AP$$

であるから,

$$\frac{11\sqrt{15}}{8}AP = \frac{33\sqrt{15}}{4}$$
$$\therefore AP = 6$$

となる。

(答) $AP = 6$

$\boxed{2}$

(1)

札の引き方は全部でn^k通りである。$k \leqq n$のとき，$X_1, X_2 \cdots X_k$がすべて異なるような引き方は，n枚からk枚をとり 1 列に並べる並べ方を考えて，

$${}_n\mathrm{P}_k = \frac{n!}{(n-k)!} \ [\text{通り}]$$

となるから，求める確率は，

$$\frac{{}_n\mathrm{P}_k}{n^k} = \frac{n!}{n^k(n-k)!}$$

となる。一方，$k > n$の場合には，$X_1, X_2 \cdots X_k$がすべて異なるような引き方が存在しないため，求める確率は0である。

(答) $\dfrac{n!}{n^k(n-k)!}$ ($k \leqq n$のとき)

0 ($k > n$のとき)

(2)

$k-1$個の同じ番号と 1 個の異なる番号の選び方は，

$n(n-1)$ [通り]

である。そのそれぞれに対し，並べ方はk通りあるので，条件を満たす札のとり方は，

$nk(n-1)$ [通り]

となる。よって，求める確率は，

$$\frac{nk(n-1)}{n^k} = \frac{k(n-1)}{n^{k-1}}$$

となる。

(答) $\dfrac{k(n-1)}{n^{k-1}}$

(3)

ℓ個の同じ番号の選び方はn通りあり，その位置の決め方は，

$${}_k\mathrm{C}_\ell = \frac{k!}{\ell!(k-\ell)!} \ [\text{通り}]$$

である。一方，$n-1 \geqq k-\ell$の場合，残りの$k-\ell$個の数字について，その並べ方は，

$${}_{n-1}\mathrm{P}_{k-\ell} = \frac{(n-1)!}{(n-k+\ell-1)!} \ [\text{通り}]$$

である。したがって，条件をみたす場合の数は，

$$n \times \frac{k!}{\ell!(k-\ell)!} \times \frac{(n-1)!}{(n-k+\ell-1)!} = \frac{n!k!}{\ell!(k-\ell)!(n-k+\ell-1)!}$$

であり，求める確率は，

$$\frac{1}{n^k} \times \frac{n!k!}{\ell!(k-\ell)!(n-k+\ell-1)!} = \frac{(n-1)!k!}{\ell!(k-\ell)!(n-k+\ell-1)!n^{k-1}}$$

となる。また，$n-1 < k-\ell$の場合，残りの$k-\ell$個がすべて異なる番号であるような札の引き方が存在しないため，求める確率は0である。

(答) $\dfrac{(n-1)!k!}{\ell!(k-\ell)!(n-k+\ell-1)!n^{k-1}}$ ($n-1 \geqq k-\ell$のとき)

0 ($n-1 < k-\ell$のとき)

$\boxed{3}$

(1)

$\angle$AOBの二等分線とABの交点をDとすると,

$$\mathrm{AD}:\mathrm{BD}=\mathrm{OA}:\mathrm{OB}=|\vec{a}|:|\vec{b}|$$

であるから,

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}\vec{a}+\frac{|\vec{a}|}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}\vec{b}$$
$$=\frac{|\vec{a}||\vec{b}|}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}\left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)$$

である。sを実数とすると，点PはOD上にあることから,

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OD}}$$

と表される。したがって，$t=\dfrac{s|\vec{a}||\vec{b}|}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}$とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{s|\vec{a}||\vec{b}|}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}\left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)$$
$$=t\left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)$$

と書ける。

（証明終）

(2)

$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=|\vec{b}-\vec{a}|$$
$$=\sqrt{|\vec{b}|^2+|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}}$$
$$=8$$

である。uを実数とすると，(1)の結果より,

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=u\left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|}\right)$$
$$=u\left(\frac{\vec{a}}{7}+\frac{\vec{b}-\vec{a}}{8}\right)$$
$$=u\left(\frac{\vec{a}}{56}+\frac{\vec{b}}{8}\right)$$

と書けるので,

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{a}+u\left(\frac{\vec{a}}{56}+\frac{\vec{b}}{8}\right)$$
$$=\left(1+\frac{u}{56}\right)\vec{a}+\frac{u}{8}\vec{b}$$

となる。同様に，vを実数とすると,

$$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=v\left(\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}+\frac{\overrightarrow{\mathrm{BA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{BA}}|}\right)$$
$$=v\left(\frac{\vec{b}}{5}+\frac{\vec{a}-\vec{b}}{8}\right)$$
$$=v\left(\frac{\vec{a}}{8}+\frac{3}{40}\vec{b}\right)$$

と書けるので

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{b}+v\left(\frac{\vec{a}}{8}+\frac{3}{40}\vec{b}\right)$$
$$=\frac{v}{8}\vec{a}+\left(1+\frac{3v}{40}\right)\vec{b}$$

となる。したがって,

$$\begin{cases}1+\dfrac{u}{56}=\dfrac{v}{8}\\[2mm]\dfrac{u}{8}=1+\dfrac{3v}{40}\end{cases}$$
$$\therefore u=14,\ v=10$$

となる。これを代入して,

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{5}{4}\vec{a}+\frac{7}{4}\vec{b}$$

を得る。

（答）$\dfrac{5}{4}\vec{a}+\dfrac{7}{4}\vec{b}$

4

(1)

実数 A を用いて，$A=\int_0^1 f(t)dt$ とおく。すると，2 次関数 $f(x)$ は

$$f(x)=6(a+1)x^2-12Ax+5a-2$$

となる。これを用いて A を計算すると，

$$\begin{aligned} A&=\int_0^1 f(t)dt \\ &=\int_0^1\{6(a+1)t^2-12At+5a-2\}dt \\ &=\left[2(a+1)t^3-6At^2+(5a-2)t\right]_0^1 \\ &=2(a+1)-6A+(5a-2) \\ &=7a-6A \end{aligned}$$

$$\therefore A=a$$

となる。

(答) $\int_0^1 f(t)dt=a$

(2)

(1)の結果より，

$$f(x)=6(a+1)x^2-12ax+5a-2$$

となる。$g(x)=-4x^3+f(x)$ より，

$$g(x)=-4x^3+6(a+1)x^2-12ax+5a-2$$

$$\begin{aligned} g'(x)&=-12x^2+12(a+1)x-12a \\ &=-12\{x^2-(a+1)x+a\} \\ &=-12(x-a)(x-1) \end{aligned}$$

である。また，$g(1), g(a)$ について計算すると，

$$g(1)=-a$$
$$g(a)=2a^3-6a^2+5a-2$$

となる。ここで，a の範囲について場合分けする。

[1] $a<1$ のとき

増減表は以下のようになる。

x	$\cdots$	a	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	↘	$g(a)$	↗	$g(1)$	↘

この増減表により，極大値は

$$g(1)=-a$$

となる。また，極小値は，

$$g(a)=2a^3-6a^2+5a-2$$

となる。

(答) $a<1$ のとき，増減は前図，極大値は $-a$，極小値は $2a^3-6a^2+5a-2$

[2] $a=1$ のとき

増減表は以下のようになる。

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$-$
$g(x)$	↘	$g(1)$	↘

増減表により，極値はもたない。

(答) $a=1$ のとき，増減は前図

[3] $1<a$ のとき

増減表は以下のようになる。

x	$\cdots$	1	$\cdots$	a	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	↘	$g(1)$	↗	$g(a)$	↘

この増減表により，極大値は

$$g(a)=2a^3-6a^2+5a-2$$

となる。また，極小値は，

$$g(1)=-a$$

となる。

(答) $1<a$ のとき，増減は前図，極大値は $2a^3-6a^2+5a-2$，極小値は $-a$

(3)

3 次方程式 $g(x)=0$ が異なる実数解をもつのは，(2)の[1]または[3]の場合において，極大値と極小値の符号が異なる場合である。したがって，

$$a\neq 1 \text{ かつ } g(1)\cdot g(a)<0$$

が求める a の条件となる。$g(1)\cdot g(a)<0$ について考えると，

$$\begin{aligned} &g(1)\cdot g(a)<0 \\ \Leftrightarrow\ &-a\cdot(2a^3-6a^2+5a-2)<0 \\ \Leftrightarrow\ &a(a-2)(2a^2-2a+1)>0 \end{aligned}$$

が得られる。ここで，$2a^2-2a+1$ について考えると，

$$2a^2-2a+1=2\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\geqq\frac{1}{2}>0$$

となるから，これは常に正の値をとる。したがって，

$$\begin{aligned} &a(a-2)(2a^2-2a+1)>0 \\ \Leftrightarrow\ &a(a-2)>0 \\ \therefore\ &a<0,\ 2<a \end{aligned}$$

となる。これは $a\neq 1$ も満たしている。

(答) $a<0,\ 2<a$