$\boxed{1}$

(1)

$x=\dfrac{\pi}{2}-t$，すなわち $t=\dfrac{\pi}{2}-x$ とおくと，

x	0	$\to$	$\dfrac{\pi}{2}$
t	$\dfrac{\pi}{2}$	$\to$	0

$dt=-dx$

となる。よって，

$$\begin{aligned}
I&=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\cos^3\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}(-dt)\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3 t}{\cos t+\sin t}dt\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3 x}{\cos x+\sin x}dx\\
&=J
\end{aligned}$$

$$\therefore I=J$$

が成立する。

(証明終)

(2)

一般に

$$\begin{aligned}
\cos^3 x+\sin^3 x&=(\cos x+\sin x)(\cos^2 x+\sin^2 x-\sin x\cos x)\\
&=(\cos x+\sin x)(1-\sin x\cos x)
\end{aligned}$$

が成り立つから，

$$\begin{aligned}
I+J&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3 x+\cos^3 x}{\cos x+\sin x}dx\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin x\cos x)dx\\
&=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x dx\\
&=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\
&=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

となる。

(答) $I+J=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{1}{2}$

(3)

(1)と(2)の結果より，

$$2I=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}$$

$$\therefore I=J=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{4}$$

となる。

(答) $I=J=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{4}$

$\boxed{2}$

(1)

行列 AB と BA を計算すると,

$$AB=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ s & -1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}a+sb & -b\\ c+sd & -d\end{pmatrix}$$

$$BA=\begin{pmatrix}1 & 0\\ s & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}a & b\\ as-c & bs-d\end{pmatrix}$$

が得られる。これを, $AB+BA=(a+d)B$ に代入すると,

$$\begin{pmatrix}a+sb & -b\\ c+sd & -d\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a & b\\ as-c & bs-d\end{pmatrix}=(a+d)\begin{pmatrix}1 & 0\\ s & -1\end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}2a+sb & 0\\ as+sd & bs-2d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+d & 0\\ s(a+d) & -(a+d)\end{pmatrix}$$

となるから, 行列の $(1,1)$ 成分を比較して

$$2a+sb=a+d$$

を得る。これを s について解けば, $b\neq 0$ であるから

$$2b\cdot s+2a-2d=0$$
$$s=\frac{d-a}{b}$$

となる。

(答) $s=\dfrac{d-a}{b}$

(2)

$AX=\alpha X$ に $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}1\\ t\end{pmatrix}$ を代入すると,

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ t\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}1\\ t\end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}a+bt\\ c+dt\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha\\ \alpha t\end{pmatrix}$$

となる。第1成分を比較して

$$\begin{cases}a+bt=\alpha\\ c+dt=\alpha t\end{cases}\qquad\cdots①$$

となる。上の式を変形すると, $b\neq 0$ であるから,

$$a+bt=\alpha$$
$$\therefore t=\frac{\alpha-a}{b}$$

が得られる。

(答) $t=\dfrac{\alpha-a}{b}$

(3)

α,β が 2 次方程式 $x^2-(a+d)x+ad-bc=0$ の解であることから, 解と係数の関係より,

$$\alpha+\beta=a+d\qquad\cdots②$$

が得られる。ここで, $\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}=BX$ を計算すると,

$$\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ s & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ t\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1\\ s-t\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1\\ \dfrac{d-\alpha}{b}\end{pmatrix}$$

となる。したがって,

$$\begin{cases}u=1\\ bv=d-\alpha\end{cases}\qquad\cdots③$$

が得られる。②, ③式を用いて $\det P$ を計算すると,

$$\det P=\det\begin{pmatrix}1 & u\\ t & v\end{pmatrix}$$
$$=\det\begin{pmatrix}1 & 1\\ \dfrac{\alpha-a}{b} & \dfrac{d-\alpha}{b}\end{pmatrix}$$
$$=\frac{a+d-2\alpha}{b}$$
$$=\frac{\beta-\alpha}{b}$$

となり, 問題文より $\alpha\neq\beta$ であるから,

$$\det P\neq 0$$

となる。したがって, P は逆行列をもつ。このとき, AP を計算すると,

$$AP=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & u\\ t & v\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}a+bt & au+bv\\ c+dt & cu+dv\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}\alpha & au+bv\\ \alpha t & cu+dv\end{pmatrix}\quad(\because ①\text{式による})$$

が得られる。①, ②, ③式を用いることにより,

$$au+bv=a+d-\alpha$$
$$=\alpha+\beta-\alpha$$
$$=\beta$$
$$cu+dv=\alpha t-dt+dv$$
$$=(\alpha-d)\cdot\frac{\alpha-a}{b}+dv$$
$$=-bv\cdot\frac{\alpha-a}{b}+dv$$
$$=(a+d-\alpha)v$$
$$=\beta v$$

となるため,

$$AP=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \alpha t & \beta v\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1 & 1\\ t & v\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1 & u\\ t & v\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}$$
$$=P\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}$$

が成り立つ。

(証明終)

$\boxed{3}$

(1)

第2式を変形すると,

$$-\{g(x)-g(0)\}=f(x)+2\int_0^x(x-t)g'(t)dt-2x\{g(x)-g(0)\}+\int_0^2 g(t)dt \quad \cdots ①$$

となる。このとき,

$$\int_0^x(x-t)g'(t)dt=x\int_0^x g'(t)dt-\int_0^x tg'(t)dt$$
$$=x\{g(x)-g(0)\}-\int_0^x tg'(t)dt$$

であるから,これを①式に代入すると,

$$-\{g(x)-g(0)\}=f(x)-2\int_0^x tg'(t)dt+\int_0^2 g(t)dt \quad \cdots ②$$

となる。

(証明終)

(2)

第1式より,$f(0)=C_1$ とおくと,$f(x)=4x^3-5x^2+2x+C_1$ と書ける。このとき,

$$f'(x)=12x^2-10x+2$$
$$=2(2x-1)(3x-1)$$

であるので,増減表は以下の通りになる。

x	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

したがって,

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}+C_1=\frac{9}{4}$$
$$\therefore C_1=2$$

より,$f(x)=4x^3-5x^2+2x+2$ となる。また,②式の両辺を x で微分すると

$$-g'(x)=f'(x)-2xg'(x)$$
$$\Leftrightarrow (2x-1)g'(x)=f'(x)$$
$$\therefore g'(x)=2(3x-1)$$

を得るので,C_2 を積分定数とすると,

$$g(x)=\int 2(3x-1)dx=3x^2-2x+C_2$$

と書ける。②式に $x=0$ を代入することにより,

$$0=2+\int_0^2 g(t)dt$$
$$\Leftrightarrow \left[x^3-x^2+C_2x\right]_0^2=-2$$
$$\Leftrightarrow 4+2C_2=-2$$
$$\therefore C_2=-3$$

を得るから,$g(x)=3x^2-2x-3$ となる。逆に,

$$\begin{cases} f(x)=4x^3-5x^2+2x+2 \\ g(x)=3x^2-2x-3 \end{cases}$$

としたとき,与えられた式は成り立つから,これらが求める答えである。

(答) $\begin{cases} f(x)=4x^3-5x^2+2x+2 \\ g(x)=3x^2-2x-3 \end{cases}$

4

(1)

$a_1=0$ より,

$$\begin{aligned} f_1'(x) &= 6x^2-6px \\ &= 6x(x-p) \end{aligned}$$

となるから, $0<p<\dfrac{1}{6}$ より, 増減表は下のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	p	$\cdots$
$f_1'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f_1(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

よって $f_1(x)$ は極大値と極小値を持つ。 a_2 は $f_1(x)$ の極大値と極小値の和であるから,

$$\begin{aligned} a_2 &= f_1(0)+f_1(p) \\ &= -1-p^3-1 \\ &= -p^3-2 \end{aligned}$$

である。

(答) $a_2=-p^3-2$

(2)

$f_k'(x)=6x^2-6px+6a_k=6(x^2-px+a_k)$ であるから, $f_k(x)$ が極大値と極小値を持つならば,

$$\begin{aligned} &f_k'(x)=0 \\ \Leftrightarrow\ &x^2-px+a_k=0 \end{aligned}$$

の解が異なる 2 つの実数解となるので,

$$\begin{aligned} &p^2-4a_k>0 \\ \Leftrightarrow\ &a_k<\frac{p^2}{4} \end{aligned}$$

である。このとき, 極大値および極小値をとる x の値は, $x^2-px+a_k=0$ の異なる 2 つの解であるから, その解を実数 $\alpha, \beta\ (\alpha<\beta)$ とすると,

$$\begin{cases} \alpha+\beta=p \\ \alpha\beta=a_k \end{cases}$$

である。 a_{k+1} は $f_k(x)$ の極大値と極小値の和であるから,

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= f_k(\alpha)+f_k(\beta) \\ &= 2(\alpha^3+\beta^3)-3p(\alpha^2+\beta^2)+6a_k(\alpha+\beta)-2 \\ &= 2\left\{(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)\right\}-3p\left\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\right\}+6a_k(\alpha+\beta)-2 \\ &= -p^3+6a_kp-2 \end{aligned}$$

となる。ここで, $f_{k+1}(x)$ について考える。

$$\begin{aligned} f_{k+1}'(x) &= 6x^2-6px+6a_{k+1} \\ &= 6(x^2-px-p^3+6a_kp-2) \end{aligned}$$

であることから, x に関する多項式 $x^2-px-p^3+6a_kp-2$ の判別式を D とすると,

$$\begin{aligned} D &= p^2-4(-p^3+6a_kp-2) \\ &= 4p^3+p^2-24a_kp+8 \end{aligned}$$

である。よって, $f_k(x)$ が極大値, 極小値を持つ条件 $a_k<\dfrac{p^2}{4}$ を用いると,

$$D>-2p^3+p^2+8$$

を得る。ここで, $g(p)=-2p^3+p^2+8$ とおくと,

$$\begin{aligned} g'(p) &= -6p^2+2p \\ &= -2p(3p-1) \end{aligned}$$

であるから, $0<p<\dfrac{1}{6}$ において, $g(p)$ は単調増加する。 $g(0)=8>0$ より, $0<p<\dfrac{1}{6}$ において $g(p)>0$ であるから, $0<p<\dfrac{1}{6}$ において, $D>0$ となる。したがって, $f_k(x)$ が極大値, 極小値を持つとき, $f_{k+1}(x)$ も極大値, 極小値を持つことが示された。

(証明終)

(3)

(1)より $f_1(x)$ が極大値, 極小値を持つから, (2)より帰納的にすべての $f_n(x)$ は極大値, 極小値を持つことがいえる。よって, (2)の議論より

$$a_{n+1}=6pa_n-p^3-2$$

である。

(答) $a_{n+1}=6pa_n-p^3-2$

(4)

$$\begin{aligned} &a_{n+1}=6pa_n-p^3-2 \\ \Leftrightarrow\ &a_{n+1}+\frac{p^3+2}{1-6p}=6p\left(a_n+\frac{p^3+2}{1-6p}\right) \end{aligned}$$

となるので, $a_1=0$ より,

$$\begin{aligned} a_n &= -\frac{p^3+2}{1-6p}+(6p)^{n-1}\frac{p^3+2}{1-6p} \\ &= \frac{p^3+2}{1-6p}\left\{(6p)^{n-1}-1\right\} \end{aligned}$$

である。

(答) $a_n=\dfrac{p^3+2}{1-6p}\left\{(6p)^{n-1}-1\right\}$